

Notas de Teoria da Relatividade

Carlos A. R. Herdeiro



Departamento de Física
Universidade de Aveiro

v1.1 2011/2012

Imagem da página de rosto:
equações de Einstein da relatividade geral,
num cemitério de comboios em Uyuni, sul da Bolívia.

Pormenor de uma foto de Madalena Miranda.

Agradeço-a a J. L. Costa.

1	Relatividade Restrita	2
1.1	O grupo de simetria da Mecânica Newtoniana	2
1.1.1	Invariância por translações	4
1.1.2	Invariância por rotações	5
1.1.3	Invariância por transformações de Galileu	8
1.1.4	Lei da adição de velocidades	9
1.2	A teoria electromagnética de Maxwell	10
1.2.1	Ondas electromagnéticas no vácuo	11
1.3	A experiência de Michelson e Morley	13
1.3.1	O interferómetro de Michelson	14
1.4	A relatividade (restrita ou especial) de Einstein: princípios	18
1.4.1	As transformações de Lorentz	19
1.4.2	Lei da adição de velocidades relativista	23
1.5	A relatividade (restrita ou especial) de Einstein: consequências físicas . . .	25
1.5.1	O espaço-tempo de Minkowski	25
1.5.2	Medindo intervalos de tempo e comprimentos espaciais	28
1.5.3	Aparentes paradoxos	31
1.5.4	Causalidade e velocidades maiores do que a da luz	33

1.6	Mecânica relativista	35
1.6.1	Cinemática	35
1.6.2	Equações do movimento	37
2	Uma motivação Física para a Relatividade Geral	41
2.1	A gravitação Newtoniana: sucessos e um pequeno problema	41
2.1.1	A lei $1/r^2$	41
2.1.2	A descoberta de Neptuno e a anomalia de Mercúrio	48
2.2	A gravitação Newtoniana e a relatividade restrita: inconsistências	53
2.2.1	Efeitos gravito-magnéticos	55
2.3	O princípio de equivalência aponta o caminho	57
3	Noções fundamentais (e pragmáticas) de geometria diferencial	63
3.1	Vectores, co-vectores (1-formas) e tensores	63
3.2	Derivada Covariante	69
3.3	Geodésicas	75
3.4	Derivada de Lie	79
3.5	Vectores de Killing	82
3.6	Planura local	85
3.7	O determinante métrico	87
3.8	O tensor de Levi-Civita	91
3.9	Curvatura	93
3.10	Desvio geodésico	96
4	As equações de Einstein e os testes clássicos da Relatividade Geral	99
4.1	Motivação física das equações de Einstein	99
4.2	A aproximação de pequenas velocidades e campos fracos	104
4.3	A solução de Schwarzschild	107
4.4	Geodésicas temporais e o avanço do periélio	114
4.5	Geodésicas nulas e a deflexão de um raio de luz	124
4.6	O desvio para o vermelho gravitacional	132

CAPÍTULO 1

Relatividade Restrita

A teoria da relatividade tem a sua gênese no electromagnetismo clássico. Neste capítulo começamos por abordar a questão do *grupo de simetria da mecânica Newtoniana* e enunciaremos o *princípio da relatividade de Galileu*, bem como a sua associada *lei da adição de velocidades*. Seguidamente discutiremos como a teoria electromagnética de Maxwell prevê uma velocidade bem definida para a propagação das flutuações do campo electromagnético no vácuo, sem especificar o associado referencial inercial. Segue-se a *hipótese do éter* e a sua refutação experimental pela *experiência de Michelson e Morley*. Enunciaremos então o *princípio da relatividade de Einstein* que forma a base da relatividade restrita. Seguir-se-á uma discussão das consequências físicas deste princípio, recorrendo a *diagramas de espaço-tempo*. Concluiremos com uma discussão da mecânica relativista. Grande parte deste capítulo é baseado nas quatro primeiras secções do livro [1].

1.1 O grupo de simetria da Mecânica Newtoniana

Em 1686-87, Isaac Newton (1642-1727) apresentou na sua principal obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* as leis da mecânica Newtoniana e em particular a sua equação do movimento (2ª lei de Newton) que relaciona a força com a variação da quanti-

dade de movimento

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} \equiv m\vec{v} \equiv m\frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (1.1.1)$$

Se a massa m é fixa, como por exemplo para uma partícula pontual,

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} \equiv m\ddot{\vec{x}}. \quad (1.1.2)$$

Por definição um referencial (isto é um sistema coordenado) em que as equações de Newton tomem a forma (1.1.2) denomina-se *referencial inercial*. Referenciais inerciais não estão definidos unicamente. Se \mathcal{O} é um referencial inercial, então todos os referenciais \mathcal{O}' relacionados com \mathcal{O} por

- i) uma translação espacial;
- ii) uma rotação de um ângulo constante (independente do tempo);
- iii) uma translação da origem do tempo;
- iv) um movimento com velocidade constante;

são também referenciais inerciais. Referências acelerados, como por exemplo um sistema em rotação rígida com velocidade angular constante, não são referenciais inerciais (ex: num carrossel surge uma força de inércia - a força centrífuga).

Este tipo de transformações geram um *grupo* no sentido matemático, denominado *grupo de Galileu*, que é o grupo de simetria das equações de Newton. Recordemos a definição de grupo.

Definição: Um grupo G é um conjunto de elementos $\{g\}$ com uma lei de composição ‘o’ que obedece às seguintes condições:

- i) O grupo é uma estrutura fechada: $g_1 \circ g_2 \in G$, $\forall g_1, g_2 \in G$;
- ii) A lei de composição do grupo é associativa: $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$, $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$;
- iii) Existe um elemento neutro (identidade) denotado por $\mathbf{1}$: $\mathbf{1} \circ g = g \circ \mathbf{1}$, $\forall g \in G$;

iv) Existe um inverso para qualquer elemento do grupo g , que é denotado por g^{-1} :

$$\forall g, \exists g^{-1}: g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = \mathbf{1}.$$

Nota: o grupo de Galileu é um *grupo de Lie*. Um grupo de Lie é um grupo contínuo, isto é um grupo cujos elementos são rotulados por parâmetros que variam continuamente. Essa continuidade dá uma estrutura de *variedade diferenciável* aos grupos de Lie, com uma determinada geometria local e uma determinada topologia.

Iremos agora estudar os tipos de transformações de coordenadas referidos em cima que deixam as equações de Newton (1.1.2) invariantes em mais detalhe.

1.1.1 Invariância por translações

Os resultados experimentais não devem depender da escolha da origem do sistema de coordenadas Cartesianas usado. Esta propriedade é denominada *homogeneidade do espaço*. Logo, se existir um sistema de massas M_N então as equações do movimento

$$m_N \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_N, \quad (1.1.3)$$

devem ser invariantes quando é feita uma translação por um vector constante \vec{b} , isto é, quando se faz a substituição

$$\vec{r}'_N = \vec{r}_N + \vec{b} \Rightarrow \dot{\vec{r}}'_N = \dot{\vec{r}}_N \Rightarrow \ddot{\vec{r}}'_N = \ddot{\vec{r}}_N, \quad \vec{F}'_N = \vec{F}_N. \quad (1.1.4)$$

Substituindo (1.1.4) em (1.1.3) é trivial concluir que as equações de Newton são invariantes; isto é, no novo referencial temos

$$m_N \ddot{\vec{r}}' = \vec{F}'_N. \quad (1.1.5)$$

Há, no entanto uma subtilidade. Porque é que a força a actuar na mass m_N é a mesma no referencial \mathcal{O} e \mathcal{O}' ? De facto poderíamos ter escrito a lei de Newton na forma

$$m_N \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_N(\vec{r}_M, \dot{\vec{r}}_M, t), \quad (1.1.6)$$

dados que a força pode depender da posição e da velocidade de todas as massas e ser uma função do tempo. Assim, vemos explicitamente que a substituição $\vec{r}'_N = \vec{r}_N + \vec{b}$ leva a

$$m_N \ddot{\vec{r}}' = \vec{F}'_N(\vec{r}'_M - \vec{b}, \dot{\vec{r}}'_M, t) . \quad (1.1.7)$$

Ora, (1.1.7) e (1.1.6) têm a mesma forma somente se a força exercida na massa m_N não depender das posições absolutas \vec{r}_M das outras massas mas somente das posições relativas $\vec{r}_N - \vec{r}_M$. Nesse caso temos que

$$\vec{F}_N = \vec{F}_N(\vec{r}_N - \vec{r}_M, \dot{\vec{r}}_M, t) \longrightarrow \vec{F}'_N = \vec{F}_N(\vec{r}'_N - \vec{r}'_M, \dot{\vec{r}}'_M, t) , \quad (1.1.8)$$

e como tal a dependência em \vec{b} desaparece. Sistemas fechados, em que todas as forças são parte do sistema geralmente têm esta propriedade (ex: um sistema de massas interagindo gravitacionalmente, segundo a lei da gravitação Newtoniana).

De um modo análogo, os resultados experimentais não devem depender na escolha da origem do tempo. Esta propriedade é denominada *homogeneidade do tempo*. As equações de Newton devem por isso ser invariantes quando se faz uma translação temporal:

$$t' = t + b . \quad (1.1.9)$$

Inspecionando as equações (1.1.6), observamos que esta invariância só é garantida caso as forças não dependam explicitamente do tempo (isto é, as forças só dependem do tempo através do movimento das fontes das forças). Este será o caso para sistemas fechados.

Assim, para sistemas fechados, as leis da natureza (leis de Newton) não permitem uma verificação experimental, ou até uma definição com significado, de localização absoluta no espaço ou no tempo.

1.1.2 Invariância por rotações

Rotações, como por exemplo uma rotação simples em torno do eixo z por um ângulo ϕ - Fig. 1.1, que transforma as coordenadas do modo

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi \quad y' = -x \sin \phi + y \cos \phi , \quad z' = z , \quad (1.1.10)$$

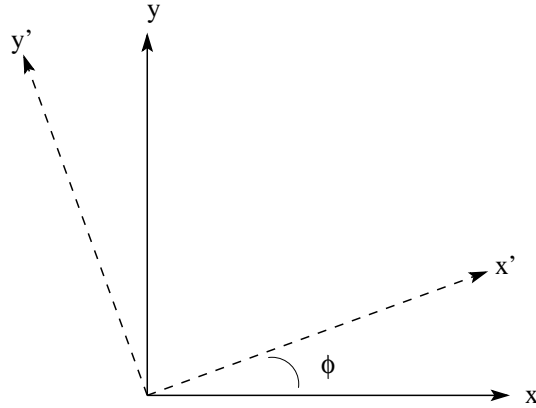


Figura 1.1: Uma rotação em torno do eixo z de um ângulo ϕ .

são eficientemente descritas usando matrizes. Para introduzirmos a notação matricial, começamos por introduzir a notação

$$x_1 = x^1 = x, \quad x_2 = x^2 = y, \quad x_3 = x^3 = z. \quad (1.1.11)$$

Doravante, usaremos a *convenção de soma de Einstein* que é usual em relatividade: existe uma soma implícita sempre que aparecerem (num factor) dois índices repetidos, um co-variante (em baixo) e outro contra-variante (em cima).

Uma rotação genérica é uma transformação linear que pode ser escrita em duas formas equivalentes

$$x^{i'} = D^{i'}_j x^j, \quad x_{i'} = D_{i'}^j x_j. \quad (1.1.12)$$

Usamos uma notação em que os sistemas de coordenadas inicial e final se distinguem pela ausência ou presença de uma *linha* no índice. Assim, o sistema de coordenadas $\{x^i\}$ ($\{x^{i'}\}$) é o sistema de coordenadas inicial (final). A matriz $D^{i'}_j$ medeia a transformação entre os dois sistemas de coordenadas e portanto tem os dois tipos de índices.

Uma rotação rígida preserva os comprimentos e os ângulos. Consideremos dois vectores arbitrários x^i e ξ^i . O seu produto escalar ficará inalterado pela rotação. Sendo os vectores transformados

$$x_{i'} = D_{i'}^j x_j, \quad \xi^{i'} = D^{i'}_k \xi^k, \quad (1.1.13)$$

a invariância do produto escalar origina a condição:

$$x_{i'}\xi^{i'} = D_{i'}^j D^i_k x_j \xi^k = x_j \xi^j . \quad (1.1.14)$$

Como \vec{x} e $\vec{\xi}$ são vectores arbitrários concluímos que

$$D_{i'}^j D^i_k = \delta_k^j , \quad (1.1.15)$$

Esta é a condição que a matriz \mathbf{D} é ortogonal (isto é, que a matriz vezes a sua transposta é igual à identidade). Por outro lado, tirando o determinante dos dois lados da equação matricial (1.1.15) obtemos

$$(\det \mathbf{D})^2 = 1 . \quad (1.1.16)$$

As transformações com $\det \mathbf{D} = +1$ são rotações; por exemplo a rotação (1.1.10) é descrita por

$$D_{i'}^j = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (1.1.17)$$

Transformações com $\det \mathbf{D} = -1$ contêm reflexões, como por exemplo a inversão

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} , \quad \Leftrightarrow \quad D_{i'}^j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (1.1.18)$$

Podemos agora aplicar facilmente uma rotação às equações de Newton. Primeiro observemos que para rotações independentes do tempo

$$x^{i'} = D^{i'}_j x^j \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}^{i'} = D^{i'}_j \ddot{x}^j . \quad (1.1.19)$$

Desde já notamos que no caso da matriz de rotação depender do tempo, haverá termos adicionais no lado direito da última equação. Segundo, observamos que a força \vec{F} é um vector; logo as suas componentes F^i transformam-se, sob a acção de uma rotação, da mesma maneira que as componentes do vector posição x^i . Terceiro, escrevendo as equações de Newton em componentes

$$F^j = m\ddot{x}^j , \quad (1.1.20)$$

e actuando em ambos os lados com a matriz de rotação $D^{i'}_j$, obtemos

$$D^{i'}_j F^j = m D^{i'}_j \ddot{x}^j \Leftrightarrow F^{i'} = m \ddot{x}^{i'} , \quad (1.1.21)$$

de modo a que no novo referencial as equações do movimento tomam a mesma forma. Mas mais uma vez, se considerarmos os argumentos das componentes da força temos

$$m \ddot{x}^{i'} = D^{i'}_j F^j(x^i, \dot{x}^i, t) = F^{i'}(x^i, \dot{x}^i, t) , \quad (1.1.22)$$

vemos que $F^{i'}$ pode depender dos argumentos errados (i.e. escritos no referencial inicial). Este não será o caso se a força depender somente de invariantes, o que acontecerá frequentemente (ex: se a força depender apenas da diferença de posições como para a força gravitacional Newtoniana).

Assim, como a força é um vector, para sistemas fechados em que a força depende apenas de quantidades invariantes por rotações, as equações do movimento são invariantes sob rotações e não permitem definições com significado de direcção absoluta no espaço.

1.1.3 Invariância por transformações de Galileu

Consideremos agora que os dois referenciais \mathcal{O} e \mathcal{O}' se movem com velocidade relativa constante

$$\vec{r}'_N = \vec{r}_N - \vec{v}t , \quad t' = t . \quad (1.1.23)$$

A esta transformação chama-se *transformação de Galileu*. Logo

$$\dot{\vec{r}}'_N = \dot{\vec{r}}_N - \vec{v} , \quad \ddot{\vec{r}}' = \ddot{\vec{r}} , \quad (1.1.24)$$

e como tal as equações do movimento (1.1.6) transformam-se como

$$m_N \ddot{\vec{r}}'_N = m_N \ddot{\vec{r}}_N = \vec{F}_N(\vec{r}'_M + \vec{v}t, \dot{\vec{r}}'_M + \vec{v}, t) . \quad (1.1.25)$$

Concluimos que a constante \vec{v} não aparece no cálculo da aceleração, mas pode ainda aparecer nos argumentos da força. As equações são, no entanto invariantes se apenas posições relativas $\vec{r}'_N - \vec{r}'_M$ (como no caso da invariância por translações) e velocidades relativas $\dot{\vec{r}}'_N - \dot{\vec{r}}'_M$ entrarem nos argumentos da força. Este é normalmente o caso quando os sistemas

são fechados e as equações do movimento estão apropriadamente escritas. Consideremos como um exemplo o movimento num campo gravitacional constante e sob a influência de atrito (a resistência do ar):

$$m\ddot{\vec{r}} = -a\dot{\vec{r}} - m\vec{g} . \quad (1.1.26)$$

À primeira vista, devido à dependência explícita em $\dot{\vec{r}}$ que ocorre nesta equação, esta força parece ser um contra-exemplo à invariância de Galileu. Contudo, aquilo que realmente entra na equação é a velocidade relativamente ao ar (que é a causa do atrito). Reescrevendo a última equação na forma

$$m\ddot{\vec{r}} = -a(\dot{\vec{r}} - \vec{v}_{ar}) - m\vec{g} , \quad (1.1.27)$$

a invariância sob uma transformação de Galileu torna-se manifesta.

Assim, em sistemas fechados, as equações do movimento são invariantes sob transformações de Galileu. Como tal uma velocidade absoluta não pode ser definida. Podemos agora enunciar o *Princípio da relatividade de Galileu*:

"As leis da física são as mesmas em todas as referências inerciais..."

... e na mecânica Newtoniana os referências inerciais relacionam-se entre si por translações do espaço e do tempo, rotações rígidas independentes do tempo e transformações de Galileu. Na sua forma original, o princípio da relatividade de Galileu foi primeiramente enunciado por Galileu Galilei (1564-1642) em 1632, no seu *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* usando a metáfora de um barco para demonstrar que as leis da física são as mesmas em dois referências relacionados por uma transformação (agora denominada) de Galileu.

1.1.4 Lei da adição de velocidades

Consideremos três referências inerciais \mathcal{O} , \mathcal{O}' and \mathcal{O}'' . Todos os três referências estão relacionados por transformações de Galileu. Seja \vec{v}_1 a velocidade de \mathcal{O}' relativamente a \mathcal{O} e \vec{v}_2 a velocidade de \mathcal{O}'' relativamente a \mathcal{O}' . Qual a velocidade de \mathcal{O}'' relativamente a \mathcal{O} ?

Usando (1.1.23) rapidamente observamos que

$$\vec{r}'_N = \vec{r}_N - \vec{v}_1 t , \quad t' = t , \quad (1.1.28)$$

e

$$\vec{r}_N'' = \vec{r}_N' - \vec{v}_2 t' , \quad t'' = t' ; \quad (1.1.29)$$

logo

$$\vec{r}_N'' = \vec{r}_N - (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)t , \quad t'' = t . \quad (1.1.30)$$

Logo a velocidade de \mathcal{O}'' relativamente a \mathcal{O} é pura e simplesmente

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 . \quad (1.1.31)$$

Esta é a (bem natural) lei da adição de velocidades para referências inerciais em Mecânica Newtoniana.

1.2 A teoria electromagnética de Maxwell

As quatro equações que actualmente denominamos *equações de Maxwell* podem ser encontradas em forma reconhecível (mas não moderna) no artigo de James C. Maxwell (1831-1879) de 1861 *On Physical Lines of Force*. Aparecem posteriormente também no artigo de Maxwell de 1865 *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field* e no volume 2 do seu livro *A Treatise on Electricity & Magnetism* publicado em 1873. Recordemos a forma destas equações:

$$\begin{aligned} (i) \quad \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & (ii) \quad \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ (iii) \quad \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (iv) \quad c^2 \nabla \times \vec{B} &= \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Nestas equações surgem duas constantes: ϵ_0 , a *permissividade eléctrica*, que surge na lei de Coulomb e no vazio vale $\epsilon_0 = 8.854187817... \times 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{s}/(\text{V} \cdot \text{m})$ e μ_0 , *permeabilidade magnética*, que surge na lei de Biot-Savart e no vazio vale $\mu_0 = .2566370614... \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$. A última é normalmente substituída pela *velocidade da luz*, $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 299,792,458 \text{ m/s}$.

A equação (i) permite-nos definir o potencial magnético, \vec{A} ,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A} , \quad (1.2.2)$$

que usando na equação de Maxwell-Faraday (iii) nos permite escrever esta como

$$\nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.2.3)$$

onde ϕ é o potencial electrostático. As duas equações (1.2.2) e (1.2.3) definem os potenciais electromagnéticos (ϕ, \vec{A}) . Note-se que estes não são únicos. Isto é, para os mesmos \vec{E}, \vec{B} existe uma classe de equivalência de diferentes escolhas para ϕ e \vec{A} a que se chama “equivalência de gauge”. Uma gauge particularmente interessante é a *gauge de Lorentz* em que os potenciais obedecem a

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (1.2.4)$$

Dado o estudo que fizemos das equações da mecânica de Newton, uma pergunta natural é: *Qual o grupo de transformações que deixa estas equações invariantes?* Este estudo, que é essencialmente matemático pode ser feito e conclui-se que o grupo é **diferente** do grupo de Galileu (denomina-se *grupo conforme* e tem como sub-grupo o *grupo de Poincaré*). Aqui optaremos por um caminho mais físico para derivar este grupo de transformações. Para isso comecemos por mostrar que as equações de Maxwell implicam a existência de *ondas electromagnéticas* no vácuo que se propagam com uma velocidade bem definida.

1.2.1 Ondas electromagnéticas no vácuo

No vácuo a densidade de carga e de corrente eléctrica são nulas $\rho = 0 = \vec{j}$. Usando (1.2.3) em (1.2.1) (ii) obtemos

$$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad (1.2.5)$$

onde $\Delta\phi \equiv \nabla \cdot \nabla\phi$ é o Laplaciano, ou, na gauge de Lorentz (1.2.4)

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta\phi = 0. \quad (1.2.6)$$

Analogamente, usando (1.2.2) e (1.2.3) em (1.2.1) (iv) obtemos

$$c^2 \nabla \times \nabla \times \vec{A} = c^2 \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}; \quad (1.2.7)$$

usando a seguinte identidade vectorial para o rotacional do rotacional de um vector:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}, \quad (1.2.8)$$

(1.2.7) fica

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \Delta \vec{A} = 0 . \quad (1.2.9)$$

As equações (1.2.6) e (1.2.9) são *equações de onda*. Informam-nos que, no vácuo, há soluções para os potenciais electromagnéticos (e também para os campos) em que estes oscilam periodicamente no tempo; para além disso estas flutuações propagam-se com uma velocidade dada pela constante c , que denominamos *velocidade da luz*.

Mas a conclusão anterior é problemática. A derivação que acabamos de fazer é válida em qualquer referencial onde as equações de Maxwell tenham a forma (1.2.1). Logo, em todos estes referenciais as ondas electromagnéticas propagam-se com velocidade c . Mas esta conclusão é paradoxal tendo em vista a lei da adição de velocidades (e o associado grupo de simetria) da mecânica Newtoniana: se num referencial inercial \mathcal{O} a velocidade da luz for c num outro referencial inercial \mathcal{O}' que se desloca relativamente a \mathcal{O} com velocidade v (na direcção x por exemplo), a velocidade da luz na direcção x deveria ser $c - v$ e não c .

Surgem duas hipóteses:

Hipótese 1 (hipótese do éter): Existe um referencial privilegiado relativamente ao qual a velocidade da luz é c . Chamemos-lhe *éter*. O éter seria no fundo o meio em que a luz se propaga. De facto, todas as manifestações ondulatórias conhecidas na física até à altura, propagavam-se num meio (vibrações acústicas, ondas num lago, ...). A velocidade c seria portanto a velocidade da luz relativamente ao éter.

Hipótese 2 (hipótese da constância da velocidade da luz): O grupo de simetria da natureza não é o grupo de Galileu mas o grupo de simetria das equações de Maxwell. E as leis de transformação entre os referenciais inerciais, *definidos agora como aqueles em que as equações de Maxwell tomam a forma (1.2.1)*, são tais que a velocidade da luz é c relativamente a todos eles.

Qual das hipóteses descreve correctamente a natureza teria de ser decido pela experiência.

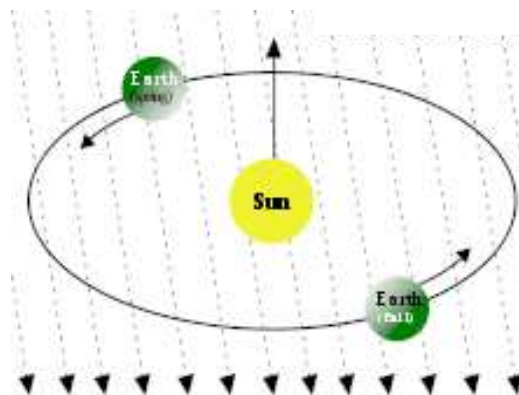


Figura 1.2: Ilustração do vento de éter no sistema Terra-Sol, assumindo a sua constância relativamente ao Sol. Retirada de [3]

1.3 A experiência de Michelson e Morley

A experiência de Michelson e Morley foi executada em 1887 por Albert Michelson (físico Americano nascido na Prússia, hoje parte da Polónia, 1852-1931) e Edward Morley (físico Americano, 1838-1923), na actual *Case Western Reserve University*, Cleveland, Ohio, EUA. O resultado desta experiência é a primeira evidência contra a hipótese do éter.

A hipótese do éter afirmava que a luz se propaga num meio - o éter - e a sua velocidade é c relativamente a este meio. Ora, o nosso planeta - a Terra - viaja a uma velocidade de cerca de 30 km/s (108,000 km/hora) em torno do Sol. O Sol por sua vez viaja em torno do centro galáctico a uma velocidade de cerca de 220 km/s. Existe ainda toda uma hierarquia de movimentos da nossa galáxia, enxame local de galáxias, etc. Como a Terra está em movimento, esperava-se, de acordo com a hipótese do éter, que na Terra se sentisse um *vento de éter* - Fig. 1.2. Claro que poderia acontecer que, num dado instante de tempo, o movimento da Terra fosse exactamente o do éter; mas como o movimento da Terra tem variações de velocidade quer em magnitude quer em direcção, a Terra não poderia estar em repouso relativamente ao éter *sempre*. Por isso, em qualquer ponto da Terra, a magnitude e direcção do vento do éter seriam funções do tempo.

Dado este cenário, pode-se sugerir o seguinte princípio para testar a hipótese do éter: analisando a velocidade da luz em diferentes direcções e em vários instantes de tempo,

poder-se-ia medir o movimento da Terra relativamente ao éter. Contudo, a grande dificuldade em planear uma experiência baseada neste princípio reside no facto de que a velocidade da Terra relativamente ao Sol (que serve de estimativa para a velocidade do vento de éter na Terra) é apenas uma parte em 10000 da velocidade da luz, pelo que ter-se-ia de medir a velocidade da luz em diferentes direcções com esta precisão. Ora, este requerimento era pura e simplesmente demasiado exigente para qualquer aparato experimental dos meados do sec. XIX. Por exemplo, o aparato de Fizeau-Foucault podia apenas medir a velocidade da luz com uma precisão de 5%.

1.3.1 O interferómetro de Michelson

O que permitiu a experiência de Michelson e Morley foi o desenvolvimento do interferómetro de Michelson. O aparelho desenhado por Michelson, mais tarde designado por *interferómetro*, possuía uma única fonte de luz. A luz era enviada através de um espelho semi-prateado, que separava o feixe em dois, que viajavam em duas direcções perpendiculares entre si. Depois de saírem do espelho semi-prateado (divisor ou *splitter*), os feixes viajavam até ao final de braços onde eram reflectidos de volta em espelhos. Voltavam então ao lado mais afastado do divisor onde interferiam, construtivamente ou destrutivamente, dependendo do tempo de viagem ao longo dos braços - Fig. 1.3.

Se a Terra viajava através do éter, um feixe emitido e reflectido *paralelo* ao vento do éter demoraria mais tempo do que um feixe reflectido perpendicular ao éter, dado que o tempo ganho a viajar a favor do vento é menor do que o tempo perdido a viajar contra o vento. Verifiquemos isto. Para tal consideremos a Fig. 1.4, diagrama 1, relativamente à qual a descrição seguinte se refere. Seja *sa* um raio de luz que é parcialmente reflectido para *ab* e parcialmente transmitido para *ac*, sendo devolvido pelos espelhos *b* e *c* ao longo de *ba* e *ca*. *ba* é parcialmente transmitido ao longo de *ad* e *ca* é parcialmente reflectido para *ad*. Os dois raios irão interferir em *ad*.

Suponhamos agora que, estando o éter em repouso, o aparato experimental se move na direcção *sc*, com a mesma velocidade que a Terra se move na sua órbita *v*. As direcções e distâncias percorridas pelos raios serão alteradas - Fig. 1.4, diagrama 2: o raio *sa* é

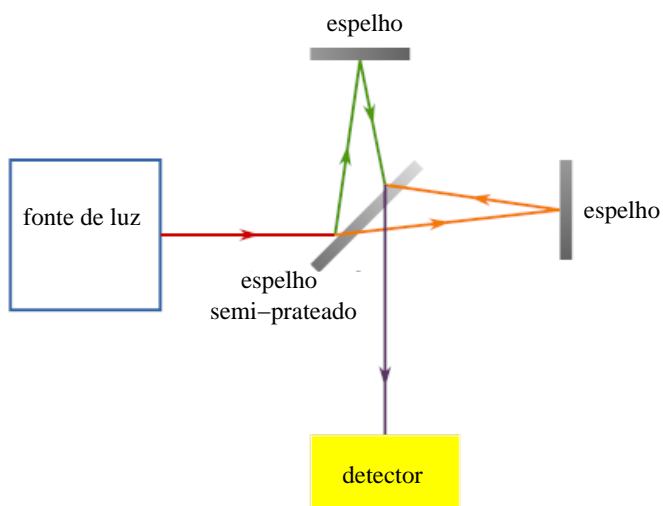


Figura 1.3: Ilustração do interferômetro de Michelson. Adaptada de [3]

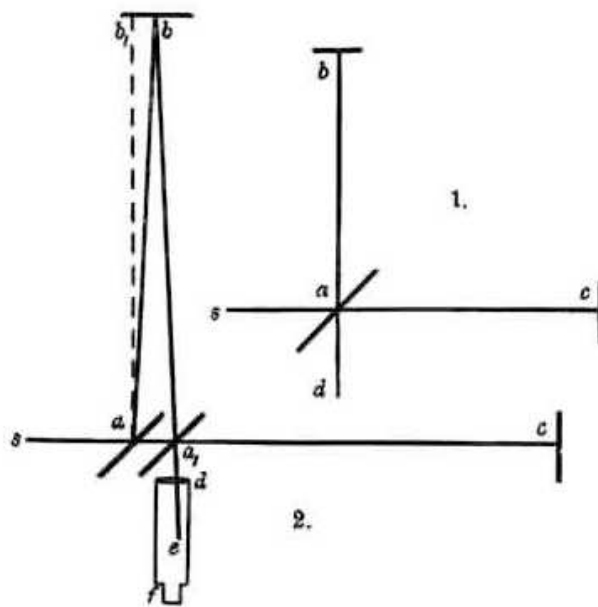


Figura 1.4: Ilustração do interferômetro de Michelson usada no artigo original de Michelson e Morley [5].

reflectido para ab e devolvido pelo espelho para ba_j , seguindo para o foco do detector. O raio transmitido segue ao longo de ac , é devolvido ao longo de ca_j , sendo reflectido em a_j para a_je , onde interfere com o primeiro raio. Consideremos a diferença entre os dois caminhos aba_j e aca_j , assumindo que os tamanhos ac e ab são iguais a D . O tempo de viagem aca_j é

$$\Delta t_{aca_j} = \frac{D}{v+c} + \frac{D}{c-v} = \frac{2Dc}{c^2-v^2} = \frac{2D}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} = \frac{2D}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right), \quad (1.3.1)$$

onde usámos o facto de que $v/c \ll 1$. Por outro lado, o tempo do percurso aba_j é dado pelo seu comprimento (obtido usando o teorema de Pictágoras com lados D e v/cD) dividido por c :

$$\Delta t_{aba_j} = \frac{2D}{c} \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2D}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right). \quad (1.3.2)$$

Logo

$$\Delta t_{aca_j} - \Delta t_{aba_j} = \frac{D}{c} \frac{v^2}{c^2} \simeq 10^{-8} \frac{D}{c}, \quad (1.3.3)$$

onde usamos $v = 30 \text{ km/s}$ e $c = 300,000 \text{ km/s}$. Nas experiências de Michelson originais, $D = 2 \times 10^6$ comprimentos de onda da luz usada (amarela). Logo,

$$c(\Delta t_{aca_j} - \Delta t_{aba_j}) = 0.02 \text{ comprimentos de onda}. \quad (1.3.4)$$

Se repetirmos de seguida a experiência com o aparato rodado de 90° obtemos, obviamente, o resultado anterior com sinal contrário. Subtraindo os dois resultados, de modo a cancelar alguma assimetria dos braços, o deslocamento esperado das franjas de interferência é de 0.04 comprimentos de onda. Como a distância entre dois máximos de luminosidade consecutivos nas franjas é um comprimento de onda, esperava-se um desvio de 4%. Na Fig. 1.5 mostramos uma montagem experimental simples de um interferómetro de Michelson moderno e o padrão de franjas de interferência obtidas.

Michelson fez as suas primeiras experiências com esta montagem experimental em 1881, ainda na Alemanha. Em 1887, juntou esforços com Morley para melhorar o seu anterior protótipo e aumentar a sua precisão. Na sua experiência, a luz era repetidamente reflectida ao longo dos braços, aumentando o tamanho efectivo do braço para 11m (tamanho para



Figura 1.5: Foto de uma montagem experimental de um interferómetro de Michelson moderno, que usa um LASER de luz vermelha e das franjas de interferência obtidas. Adaptada de [4, 3]

o qual o desvio das franjas devia ser cerca de 0.4 comprimentos de onda - uma ordem de grandeza acima do valor anterior). Para ser facilmente detectável, o aparato foi colocado numa sala fechada na cave de um edifício de pedra, eliminando a maioria das vibrações e efeitos termicos. Para além disso, as vibrações foram reduzidas construindo o aparato em cima de um enorme bloco de mármore que foi colocado a flutuar numa piscina de mercúrio - Fig 1.6. Com este aparato, o erro experimental era menor do que 0.01 franjas.

A piscina de mercúrio permitia que o aparato pudesse ser rodado por qualquer ângulo. Assim, mesmo num período curto de tempo, algum efeito teria de ser visível simplesmente rodando o aparelho, de modo a que os braços fizessem diferentes ângulos com o vento de éter. De facto, em cada rotação completa do aparelho, cada braço estaria paralelo ao vento duas vezes (paralelo e anti-paralelo) e perpendicular a ele outras duas. Logo, uma curva sinusoidal para o desvio das franjas com dois picos e dois mínimos devia ser visível. Para além disso, durante períodos mais longos, ciclos dia/noite ou ciclos anuais teriam também de ser visíveis. De facto, se o vento fosse apenas devido à órbita da terra em torno do sol, o vento mudaria de para a direcção oposta em períodos de 12 horas. Nesta idealização de que a causa principal da variação do vento é o movimento da Terra em torno do Sol, haveria um ciclo anual detectável pela variação da magnitude do vento.

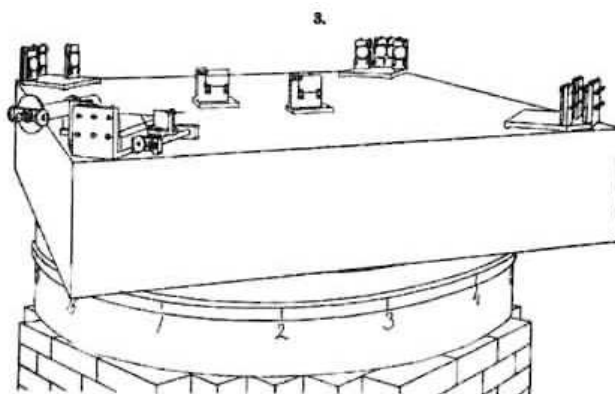


Figura 1.6: Ilustração da experiência original de Michelson e Morley. Retirado do artigo original de Michelson e Morley [5].

Qual o resultado da experiência de Michelson e Morley? Ela tornou-se a mais famosa experiência falhada até hoje! Em vez de obter informação sobre as propriedades do éter, o artigo de Michelson e Morley [5], apresentou medidas muito inferiores ao esperado e compatíveis, dentro do erro experimental, com a invariância da velocidade da luz nas várias direcções.

A experiência tinha-se decidido pela *hipótese 2*.

1.4 A relatividade (restrita ou especial) de Einstein: princípios

Motivado pela teoria electromagnética de Maxwell e pela ausência de evidência para a existência do éter (resultado nulo da experiência de Michelson e Morley), Albert Einstein postulou, em 1905 a constância da velocidade da luz. O *Princípio da relatividade de Einstein* incorpora o princípio da relatividade de Galileu, no sentido em que também afirma que

”As leis da física (não só do electromagnetismo e mecânica) são as mesmas em todas as referências inerciais...”

... mas os referências inerciais são *diferentes* dos da mecânica Newtoniana, porque

Einstein afirma que

”A velocidade da luz é constante em todas as referências inerciais.”

Quais são, então, as novas leis de transformação entre referências inerciais? Essas serão as transformações que deixam invariantes as equações de Maxwell. Vejamos como as podemos descobrir usando os princípios anteriores.

1.4.1 As transformações de Lorentz

Consideremos uma fonte de luz (uma lâmpada) localizada em $x, y, z = 0$ relativamente a um sistema de coordenadas \mathcal{O} . Em $t = 0$ esta lâmpada é acesa emitindo luz em todas as direcções. Assim, existe uma frente de onda esférica que se propaga com velocidade c e como tal, no instante t , define a superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \Leftrightarrow -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 . \quad (1.4.1)$$

Observamos desde logo que as coordenadas espaciais e temporal entram nesta fórmula de uma maneira bastante simétrica. Por isso vamos adaptar as nossas coordenadas a esta esfera de luz e tomamos o tempo como *coordenada zero*, $x^0 = ct$. Mais precisamente

$$x^\alpha = (ct, x, y, z) , \quad x_\alpha = (-ct, x, y, z) , \quad \alpha = 0, \dots, 3 . \quad (1.4.2)$$

Os dois tipos de coordenadas (com índices contra-variantes e co-variantes) relacionam-se por uma matriz η , que é usada para subir ou descer os índices:

$$\begin{aligned} x_\alpha &= \eta_{\alpha\beta} x^\beta , \\ \eta_{\alpha\beta} &= \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \eta_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha . \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Usando estas coordenadas e esta matriz, a equação (1.4.1) pode ser escrita

$$x^\alpha x_\alpha = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 . \quad (1.4.4)$$

Consideremos agora um outro sistema de coordenadas \mathcal{O}' , relacionado com \mathcal{O} por uma transformação de Galileu:

$$(ct', x', y', z') = (ct, x - vt, y, z) . \quad (1.4.5)$$

Se a velocidade da luz também for c neste referencial, então, no caso da lâmpada anterior, a esfera de luz no instante t deveria descrever a esfera

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 . \quad (1.4.6)$$

Mas esta esfera é obviamente diferente da anterior. Como a mesma esfera de luz não pode estar em dois locais diferentes, concluímos que as transformações de Galileu não são compatíveis com o princípio da constância da velocidade da luz. Para deduzirmos quais as transformações que são compatíveis com este princípio vamos *requerer* que essas transformações deixem invariante a esfera de luz (1.4.4), de modo a que a esfera de luz seja a mesma nos dois referenciais.

Tal como no caso da mecânica clássica vamos procurar transformações lineares. Logo

$$x^{\nu'} = L^{\nu'}_{\alpha} x^{\alpha} , \quad x_{\mu'} = L_{\mu'}^{\beta} x_{\beta} , \quad L_{\mu'}^{\beta} = \eta_{\mu'\nu'} \eta^{\alpha\beta} L^{\nu'}_{\alpha} . \quad (1.4.7)$$

Para a esfera de luz ter a mesma forma nos dois referenciais, $x^{\nu} x_{\nu} = 0 = x^{\nu'} x_{\nu'}$, temos de satisfazer

$$x^{\nu'} x_{\nu'} = L^{\nu'}_{\alpha} L_{\nu'}^{\beta} x^{\alpha} x_{\beta} = x^{\beta} x_{\beta} , \quad (1.4.8)$$

que, para todos os x^{α} só é possível se

$$L^{\nu'}_{\alpha} L_{\nu'}^{\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} , \quad \alpha, \beta, \nu' = 0, \dots, 3 . \quad (1.4.9)$$

Estas equações definem as *transformações de Lorentz*, apresentadas originalmente pelo físico alemão Waldemar Voigt (1850-1919) em 1887, que no entanto não compreendeu na altura a sua abrangência. Se admitirmos também translações

$$x^{\nu'} = L^{\nu'}_{\alpha} x^{\alpha} + c^{\nu'} , \quad c^{\nu'} = \text{constante} , \quad (1.4.10)$$

obtemos as *transformações de Poincaré*.

A equação (1.4.9) é muito semelhante à equação (1.1.15), para as rotações e reduz-se a ela quando a coordenada temporal permanece inalterada, i.e. quando

$$L^{\nu'}_{\alpha} = \begin{pmatrix} D^{n'}_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.11)$$

As rotações deixam $x^i x_i = x^2 + y^2 + z^2$ invariante; as transformações de Lorentz deixam $x^\alpha x_\alpha = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ invariante.

Determinamos agora a transformação de Lorentz particular que corresponde a um movimento (com velocidade constante) na direcção x . Começamos com o *ansatz*

$$\begin{aligned} ct' &= Act + Bx, & y' &= y, \\ x' &= Cct + Dx, & z' &= z, \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad L^{\nu'}_{\alpha} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.12)$$

Logo

$$L_{\mu'\alpha} = \eta_{\mu'\nu'} L^{\nu'}_{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & -B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (1.4.13)$$

$$L_{\mu'}^{\beta} = L_{\mu'\alpha} \eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -A & -B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B & 0 & 0 \\ -C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (1.4.14)$$

Logo

$$L^{\nu'}_{\alpha} L_{\nu'}^{\beta} = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & -B & 0 & 0 \\ -C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 - C^2 & -AB + CD & 0 & 0 \\ BA - CD & -B^2 + D^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4.15)$$

Assim, a equação (1.4.9) origina as seguintes três condições:

$$A^2 - C^2 = 1, \quad BA = CD, \quad D^2 - B^2 = 1. \quad (1.4.16)$$

Estas condições podem ser parametricamente resolvidas pelas escolhas

$$A = D = \cosh \varphi, \quad B = C = -\sinh \varphi. \quad (1.4.17)$$

Deste modo, as transformações de Lorentz ficam

$$\begin{aligned} ct' &= ct \cosh \varphi - x \sinh \varphi, & z' &= z, \\ x' &= -ct \sinh \varphi + x \cosh \varphi, & y' &= y. \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

Observe-se a analogia com as rotações:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \phi - y \sin \phi, & z' &= z, \\ y' &= -x \sin \phi + y \cos \phi, & t' &= t. \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

As transformações (1.4.18) denominam-se *pseudo-rotações*. Mas qual o significado físico do parâmetro φ ? Para o compreendermos consideremos o movimento da origem do referencial \mathcal{O}' , $x' = 0$, visto por \mathcal{O} . Usando (1.4.18)

$$x' = 0 \Leftrightarrow x = ct \tanh \varphi; \quad (1.4.20)$$

Como no referencial \mathcal{O} , $v = dx/dt = c \tanh \varphi$. Logo

$$\tanh \varphi = \frac{v}{c}, \quad (1.4.21)$$

pelo que o parâmetro φ é simplesmente a velocidade de \mathcal{O}' no referencial \mathcal{O} em ‘unidades naturais’. Usando

$$\cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad \sinh \varphi = \sqrt{\cosh^2 \varphi - 1} = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (1.4.22)$$

obtemos as transformações de Lorentz na sua forma mais canónica:

$$ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (1.4.23)$$

Estas transformações descrevem a transformação entre o sistema \mathcal{O} e \mathcal{O}' , onde \mathcal{O}' se move na direcção x com velocidade v (medida por \mathcal{O}) relativamente a \mathcal{O} .

Observemos que para velocidades pequenas relativamente à da luz, $v/c \ll 1$,

$$t' = t + \mathcal{O}(v/c), \quad x' \simeq x - vt + \mathcal{O}((v/c)^2), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (1.4.24)$$

pelo que recuperamos as transformações de Galileu. Vemos assim, que a mecânica Newtoniana e o seu grupo de simetrias são válidas para pequenas velocidades. Mas para velocidades próximas da luz discrepâncias começam a aparecer.

É muito simples inverter as relações (1.4.23). Obtemos:

$$ct = \frac{ct' + vx'/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad y = y', \quad z = z'. \quad (1.4.25)$$

o que corresponde a trocar $v \rightarrow -v$.

1.4.2 Lei da adição de velocidades relativista

Dado que a velocidade da luz é a mesma para todos os referenciais inerciais, mesmo que estejam em movimento relativo, a lei de adição de velocidades terá de ser diferente daquela que encontrámos na mecânica de Newton. Para a deduzirmos, no caso de duas velocidades paralelas, colocamos a seguinte questão: qual o resultado de fazer duas transformações de Lorentz consecutivas, ambas correspondentes a movimentos na direcção x ?

Usando as pseudo-rotações (1.4.18) temos uma primeira transformação de Lorentz entre o referencial \mathcal{O} e \mathcal{O}' :

$$\begin{aligned} ct' &= ct \cosh \varphi_1 - x \sinh \varphi_1, & z' &= z, \\ x' &= -ct \sinh \varphi_1 + x \cosh \varphi_1, & y' &= y. \end{aligned} \quad (1.4.26)$$

seguida de uma segunda entre o referencial \mathcal{O}' e \mathcal{O}'' :

$$\begin{aligned} ct'' &= ct' \cosh \varphi_2 - x' \sinh \varphi_2, & z'' &= z', \\ x'' &= -ct' \sinh \varphi_2 + x' \cosh \varphi_2, & y'' &= y'. \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

Combinando as duas relações podemos escrever a lei de transformação entre os referenciais \mathcal{O} e \mathcal{O}'' :

$$\begin{aligned} ct'' &= ct \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) - x \sinh(\varphi_1 + \varphi_2), & z'' &= z, \\ x'' &= -ct \sinh(\varphi_1 + \varphi_2) + x \cosh(\varphi_1 + \varphi_2), & y'' &= y, \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

onde usámos as bem conhecidas relações

$$\cosh(\varphi_1 + \varphi_2) = \cosh \varphi_1 \cosh \varphi_2 + \sinh \varphi_1 \sinh \varphi_2, \quad (1.4.29)$$

$$\sinh(\varphi_1 + \varphi_2) = \sinh \varphi_1 \cosh \varphi_2 + \sinh \varphi_2 \cosh \varphi_1. \quad (1.4.30)$$

Ou seja, compôr duas pseudo-rotações corresponde a adicionar os ângulos, tal como para as rotações usuais. O pseudo-ângulo para a transformação de Lorentz entre \mathcal{O} e \mathcal{O}'' é portanto $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. A sua velocidade associada, que corresponde à velocidade de \mathcal{O}'' medida por \mathcal{O} é

$$\frac{v}{c} = \tanh \varphi = \tanh(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\tanh \varphi_1 + \tanh \varphi_2}{1 + \tanh \varphi_1 \tanh \varphi_2} = \frac{v_1/c + v_2/c}{1 + v_1 v_2 / c^2}, \quad (1.4.31)$$

onde v_1 é a velocidade de \mathcal{O}' medida por \mathcal{O} e v_2 é a velocidade de \mathcal{O}'' medida por \mathcal{O}' . Ou seja,

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}. \quad (1.4.32)$$

Esta é a *lei de adição de velocidades relativista*. Se $v_1/c, v_2/c \ll 1$ recuperamos a lei de adição de velocidades da mecânica clássica $v \simeq v_1 + v_2$. Se tomarmos o caso limite em que $v_1 = c$ (note-se que as transformações de Lorentz tornam-se singulares neste caso), obtemos

$$v = \frac{c + v_2}{1 + v_2/c} = c. \quad (1.4.33)$$

Ou seja, a fórmula de adição de velocidades indica que *velocidade da luz não pode ser ultrapassada e desempenha o papel de velocidade máxima!* Se adicionarmos duas velocidades menores do que c o resultado será sempre uma velocidade menor do que c . Claro que falta entender como é que *dinamicamente* esta velocidade máxima é implementada.

1.5 A relatividade (restrita ou especial) de Einstein: consequências físicas

Consideremos agora as consequências físicas das transformações de Lorentz, cuja maioria foi primeiramente encontrada e percebida por Einstein em 1905.

1.5.1 O espaço-tempo de Minkowski

Os princípios da relatividade restrita (equivalência dos referências inerciais e constância da velocidade da luz) são mais facilmente incorporados nas leis da física usando o conceito de *espaço-tempo de Minkowski*, introduzido em 1908 por Hermann Minkowski (1864-1909), por vezes designado, por simplicidade, espaço de Minkowski. O espaço-tempo de Minkowski junta o espaço e o tempo numa única entidade. Isto é formalizado usando as coordenadas

$$x^\alpha = (ct, x^i) = (ct, \vec{r}) , \quad x_\alpha = \eta_{\alpha\beta} x^\beta = (-ct, x_i) . \quad (1.5.1)$$

Um ponto neste espaço é caracterizado por especificarmos espaço *e* tempo; designa-se por *evento*.

As propriedades *métricas* do espaço de Minkowski, em coordenadas de Minkowski, são dadas pelo elemento de linha:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -c^2 dt^2 + d\vec{r}^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta . \quad (1.5.2)$$

Note-se que o elemento de linha é invariante quando executada uma transformação de Lorentz

$$x^{\nu'} = L^{\nu'}_{\alpha} x^\alpha , \quad L^{\nu'}_{\alpha} L_{\nu'}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} , \quad (1.5.3)$$

dado que $x^\nu x_\nu$ é invariante. Note-se que a métrica ds^2 não é definida positiva.

Um *4-vector* $a^\nu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \vec{a})$ é um conjunto de quatro elementos que se transformam como as componentes do vector posição x^ν ,

$$a^{\nu'} = L^{\nu'}_{\mu} a^\mu . \quad (1.5.4)$$

Um exemplo é o vector que liga dois pontos (eventos) P_1 e P_2 no espaço de Minkowski,

$$P_1 \vec{P}_2 = (ct^2 - ct^1, x^2 - x^1, y^2 - y^1, z^2 - z^1) . \quad (1.5.5)$$

Claramente, uma transformação de Lorentz mistura a parte espacial e temporal de um 4-vector, mas deixa o seu ‘comprimento’, invariante:

$$a^{\nu'} a_{\nu'} = L^{\nu'}_{\mu} L_{\nu'}^{\beta} a^{\mu} a_{\beta} = a^{\nu} a_{\nu} = \text{invariante} . \quad (1.5.6)$$

Este invariante pode ser positivo, negativo ou zero, dependendo do tamanho relativo das partes espacial e temporal do 4-vector. Consequentemente existe a seguinte classificação invariante de 4-vectors:

$$a^n a_n = -(a^0)^2 + \vec{a}^2 \begin{cases} > 0 , & 4\text{-vector espacial} , \\ = 0 , & 4\text{-vector nulo} , \\ < 0 , & 4\text{-vector temporal} . \end{cases} \quad (1.5.7)$$

Para um dado 4-vector com componentes a^{ν} , podemos sempre efectuar uma rotação espacial do sistema de coordenadas de modo a que o vector aponte na direcção x e fique na forma $a^{\nu} = (a^0, a^1, 0, 0)$. Seguidamente, fazendo uma transformação de Lorentz do tipo (1.4.23), obtemos as componentes do 4-vector no referencial \mathcal{O}'

$$a^{0'} = \frac{a^0 - va^1/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} , \quad a^{1'} = \frac{a^1 - va^0/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} . \quad (1.5.8)$$

Se $|a^1/a^0| > 1$, podemos fazer $a^{0'}$ desaparecer por uma escolha apropriada de v (menor do que c). Nos restantes casos podemos fazer algo semelhante, obtendo as seguintes *formas normais* para 4-vectores

$$\begin{aligned} & \text{vector espacial : } a^{\nu} = (0, a, 0, 0) \\ \text{Formas normais :} & \quad \text{vector nulo : } a^{\nu} = (a, a, 0, 0) \quad . \\ & \quad \text{vector temporal : } a^{\nu} = (a, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

Se tivermos dois 4-vectores, a^{ν} e b^{ν} , podemos definir o produto escalar por

$$|ab| = a^{\mu} b_{\mu} = \eta_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} . \quad (1.5.10)$$

Este objecto é, claramente, um invariante por transformações de Lorentz. Quando $|ab| = 0$, os dois vectores são ditos *ortogonais ou perpendiculares*. Note-se que, neste sentido, um vector nulo é perpendicular a si próprio.

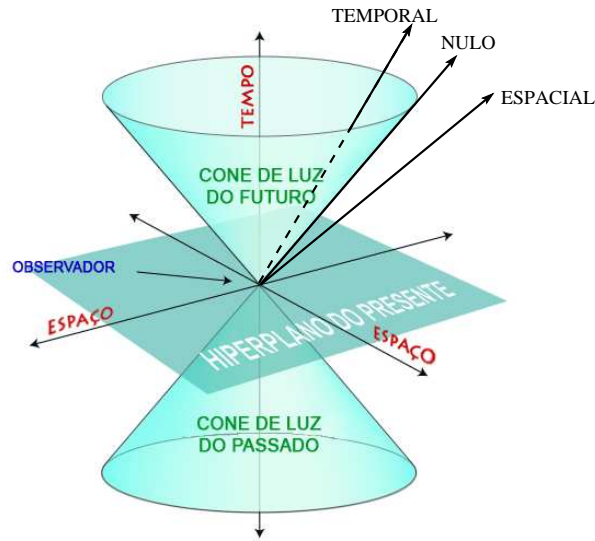


Figura 1.7: O cone de luz de um evento.

Uma onda de luz com origem em $t = 0$ na origem do sistema de coordenadas, estará, no instante t em pontos \vec{r} obedecendo a

$$\vec{r}^2 - c^2t^2 = 0 . \quad (1.5.11)$$

Se suprimirmos uma das coordenadas espaciais, esta equação descreve um cone no espaço-tempo (x, y, ct) . Por isso chamamos a (1.5.11) o *cone de luz*. Como ilustrado na Fig. 1.7, o cone de luz separa 4-vectores temporais (dentro dele) de 4-vectores espaciais (fora dele); vectores nulos são tangentes a ele.

Podemos visualizar a transformação de Lorentz (1.4.23) no espaço de Minkowski desenhando as linhas $x' = 0$ e $ct' = 0$ como o eixo ct' e x' do referencial \mathcal{O}' , para vários valores de v , no diagrama de espaço-tempo de \mathcal{O} - Fig 1.8. Para o fazermos, notamos que, de (1.4.23), o eixo ct' ($x' = 0$) corresponde a $ct = cx/v$, enquanto que o eixo x' ($ct' = 0$) corresponde a $ct = vx/c$. Concluimos por isso que os ângulos entre os eixos x e x' e entre os eixos ct e ct' são iguais e iguais a $\arctan v/c$. A figura mostra claramente que o novo eixo ct' (x') encontra-se sempre dentro (fora) do cone de luz, que a transformação se torna singular para $v = c$ e que qualquer 4-vector temporal (espacial) pode ser colocado na forma normal por uma transformação de Lorentz apropriada. O que o diagrama não

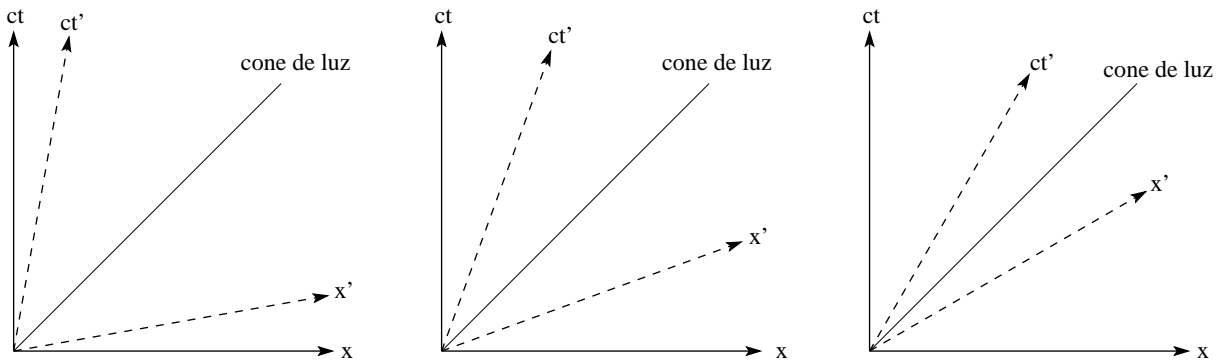


Figura 1.8: Três diagramas de espaço-tempo representando os observadores \mathcal{O} e \mathcal{O}' para $v/c = \tan 10^\circ \simeq 0.176$ (esquerda), $v/c = \tan 20^\circ \simeq 0.364$ (centro) e $v/c = \tan 30^\circ \simeq 0.577$ (esquerda).

ilustra correctamente é a equivalência que existe entre os dois sistemas de coordenadas.

1.5.2 Medindo intervalos de tempo e comprimentos espaciais

Parece natural requerer que o resultado de uma medida experimental seja independente do observador que a fez. Contudo, se admitirmos observadores em movimento relativo, apenas os invariantes por transformações de Lorentz irão satisfazer esta condição. Assim, por exemplo, distâncias espaciais, que aparecem apenas como uma parte de um 4-vector, não têm significado invariante.

Na mecânica Newtoniana (e na prática) estamos habituados a medir distâncias espaciais e intervalos de tempo separadamente. O que a relatividade de Einstein nos ensina é que o resultado destas medições irá depender do estado de movimento do observador, exactamente da mesma maneira que as componentes de um 3-vector dependem da orientação do sistema de coordenadas Cartesianas usado.

A questão que desejamos considerar é: suponhamos que dois observadores \mathcal{O} e \mathcal{O}' (em movimento relativo) fazem medições; como estão relacionados os seus resultados? A resposta a esta questão leva a alguns dos mais espectaculares resultados da teoria da relatividade restrita.

A noção de simultaneidade

Como um preâmbulo consideremos o significado de *mesmo lugar em instantes diferentes*. Se um observador \mathcal{O} afirma isto para um objecto, quer dizer que o objecto está em repouso em $x = 0$ (por exemplo). Para um observador \mathcal{O}' que se move relativamente a \mathcal{O} e ao objecto, o objecto muda a sua posição coordenada; de (1.4.23) obtemos

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{-vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (1.5.12)$$

Assim, não existe noção *absoluta* de estar no mesmo lugar em instantes diferentes. Esta observação é bastante trivial; mas a correspondente observação trocando os papéis de tempo e espaço não o é. Se um observador \mathcal{O} afirma que dois eventos em diferentes localizações espaciais x_A e x_B são simultâneos (observados no mesmo instante t_0) então por uma aplicação das transformações de Lorentz obtemos

$$ct'_A = \frac{ct_0 - vx_A/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad ct'_B = \frac{ct_0 - vx_B/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad \Rightarrow \quad c(t'_A - t'_B) = \frac{(x_B - x_A)v}{c\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (1.5.13)$$

Para o observador \mathcal{O}' os dois eventos já não são simultâneos: *não existe noção absoluta de simultaneidade em diferentes localizações espaciais*.

Consideremos a noção de simultaneidade em mais detalhe, para um único observador. Como poderemos decidir se dois eventos em diferentes locais A e B acontecem simultaneamente? Na física Newtoniana, em que sinais se podem propagar instantaneamente, usamos o conceito que há sinais com uma velocidade infinita vindos de A e B que nos dizem que os eventos ocorreram. Obviamente em relatividade não podemos usar este conceito. Uma possível definição de simultaneidade é a seguinte (usada por Einstein): dois eventos A e B são simultâneos se sinais de luz emitidos simultaneamente com esses eventos chegam simultaneamente ao meio da linha AB . Note-se que esta definição de simultaneidade de eventos em diferentes pontos espaciais usa apenas a simultaneidade de eventos no mesmo ponto espacial.

Usando este tipo de procedimento, o observador \mathcal{O} poderia sincronizar uma grelha de relógios no espaço-tempo. Obviamente, para outro observador, os relógios dessa grelha não estarão sincronizados.

Dilatação dos tempos

Em $\vec{r} = 0$, um conjunto de eventos toma lugar entre $t_I = 0$ e $t_F = T$; para o observador \mathcal{O} , em repouso relativamente a estes eventos, o correspondente intervalo de tempo é $\Delta t = T$. Devido à transformação de Lorentz (1.4.23), temos

$$ct'_I = 0, \quad ct'_F = \frac{cT}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}; \quad (1.5.14)$$

logo, para o observador em movimento \mathcal{O}' estes eventos demoram

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (1.5.15)$$

Um relógio em movimento anda mais devagar que um relógio em repouso; qualquer relógio anda à velocidade máxima do ponto de vista do observador em repouso relativamente a ele.

Contração dos comprimentos

Quando medimos o comprimento de uma vara relativamente à qual estamos em repouso, os instantes de tempo t_A e t_B nos quais olhamos para os dois extremos da vara x_A e x_B , são indiferentes. O seu comprimento será sempre $L = \Delta x$. Para um sistema em movimento \mathcal{O}' a situação é diferente; dado que a vara está em movimento no seu referencial, \mathcal{O}' tem de se certificar que determina os dois extremos da vara *simultaneamente!* Portanto \mathcal{O}' usará (1.4.23) na forma

$$x'_A = \frac{-vt_A}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad ct'_A = \frac{ct_A}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (1.5.16)$$

$$x'_B = \frac{L - vt_B}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad ct'_B = \frac{ct_B - vL/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad (1.5.17)$$

e terá de tomar $t'_A = t'_B$. Escolhendo $t'_A = 0$, o que implica que $T_A = 0$ e $t_B = vL/c^2$. Logo $x'_A = 0$ e $x'_B = L\sqrt{1 - (v/c)^2}$ ou

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - (v/c)^2}. \quad (1.5.18)$$

Uma vara em movimento é mais pequena do que uma em repouso; qualquer vara tem o tamanho máximo para o observador em repouso relativamente a ela.

1.5.3 Aparentes paradoxos

Devido às subtilezas envolvidas podem-se construir experiências *gedanken* com resultados aparentemente paradoxais para diferentes observadores. Obviamente, quando correctamente examinadas, não existem paradoxos. Consideremos dois exemplos.

Um carro maior do que a garagem

Consideremos um carro com comprimento $2L$ e uma garagem com comprimento L , ambos medidos em repouso. Consideremos agora o processo em que o carro se move na direcção da garagem. No referencial \mathcal{O} (referencial da garagem), o comprimento da garagem é L . Mas o carro irá sofrer contracção de Lorentz. Será o suficiente para caber na garagem? Se o carro (referencial \mathcal{O}') se move com velocidade $v = c\sqrt{3}/2$, usando (1.5.18) temos

$$\Delta x' = 2L\sqrt{1 - 3/4} = L, \quad (1.5.19)$$

e portanto parece que o carro cabe exactamente na garagem!

No referencial \mathcal{O}' (referencial do carro), o carro tem comprimento $2L$. Será agora a garagem a sofrer contracção de Lorentz passando a um tamanho de $L/2$, ou seja quatro vezes menor do que o carro!

Parece, assim, que o resultado de uma experiência que tem de ser único - se o carro cabe ou não na garagem - tem dois resultados distintos para os dois observadores diferentes. Temos um paradoxo?

O resultado estranho parece ser, sem dúvida, o resulta obtido por \mathcal{O} , dado que em repouso o carro é de facto maior do que a garagem. Analisemos pois o seu resultado usando um diagrama de espaço-tempo - Fig. 1.9. No diagrama representamos as linhas de mundo dos dois extremos da garagem, $g1$ e $g2$ que são duas linhas verticais, dado que a garagem está em repouso para \mathcal{O} . Representamos também as linhas de mundo dos dois extremos do carro $c1$ e $c2$. \mathcal{O} fez a sua observação no instante ct_0 e observou a linha tracejada. Parece-lhe por isso, de facto que $g1$ coincide com $c1$ e $g2$ com $c2$ e portanto o carro parece caber na garagem. Contudo, \mathcal{O}' vai objectar, dizendo que \mathcal{O} não olhou para o início e o fim do carro em simultâneo; \mathcal{O}' vai dizer que \mathcal{O} olhou para a extremidade

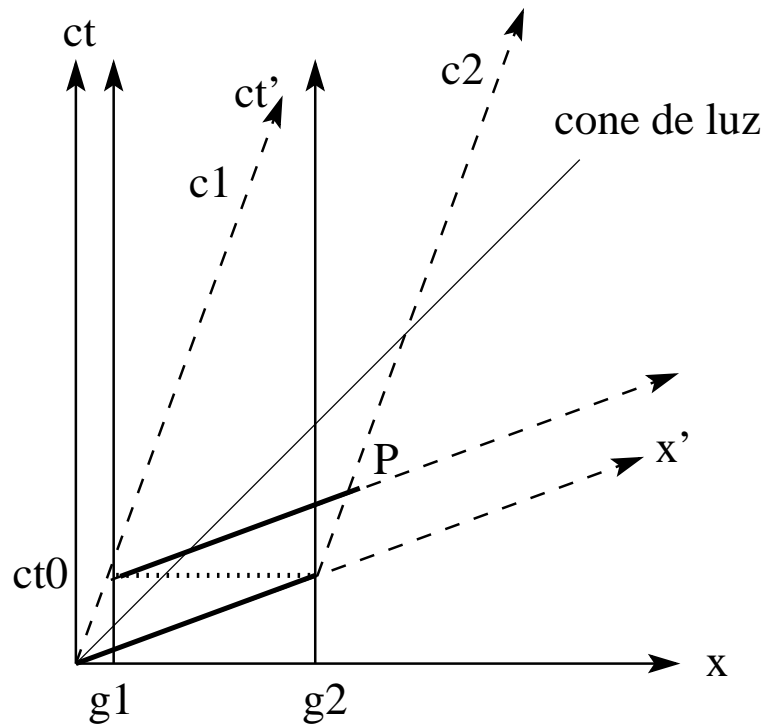


Figura 1.9: Diagrama de espaço-tempo para o carro a entrar na garagem. Nota: a velocidade usada neste diagrama não é $\sqrt{3}c/2$.

$c2$ do carro quando esta já tinha chegado ao final da garagem $g2$ e depois esperou até a extremidade $c1$ entrar na garagem, isto é intersectar $g1$, para fazer a segunda medição. Se \mathcal{O} olhasse para $c1$ quando $c2$ tinha chegado ao fim da garagem, veria que estava na origem e como tal fora da garagem; se \mathcal{O} olhasse para $c2$ quando $c1$ chegou ao início da garagem veria que estava em P e como tal fora da garagem.

O “paradoxo” dos gémeos

Consideremos um par de gémeos. Um viaja pelo Universo a alta velocidade constante (relativamente à Terra); o outro fica na Terra.

Do ponto de vista do observador \mathcal{O} (gémeo que fica na Terra), o seu irmão viajante vai sofrer a dilatação dos tempos e como tal o seu relógio biológico corre mais devagar. Por isso, quando ele voltar à Terra, o irmão viajante deverá estar mais novo do que ele.

Do ponto de vista do observador \mathcal{O}' (gémeo viajante), a Terra é que se move relativa-

mente a ele (com velocidade aproximadamente constante), e como tal para ele, deverá ser o seu irmão que fica na Terra a sofrer a dilatação dos tempos e por isso a encontrar-se mais novo do que ele quando se voltarem a juntar.

O resultado é aparentemente paradoxal! Assim, quando os dois se encontrarem novamente na Terra, quem está mais novo do que o outro?

A hipótese errada é que os dois observadores são completamente equivalentes. Enquanto os dois observadores estão relacionados por uma transformação de Lorentz, eles só se podem encontrar uma única vez durante o seu movimento. Para compararem quem está mais novo, um dos dois terá de sincronizar um segundo relógio distante para o outro irmão comparar com o seu próprio relógio. Mas esta sincronização será dependente de observador. Para os dois observadores se reencontrarem, um deles terá de *acelerar*! Isto quebrará a simetria entre os dois e, de acordo com as leis da relatividade geral, será aquele que acelerar que de facto ficará mais novo.

1.5.4 Causalidade e velocidades maiores do que a da luz

A relatividade restrita nega a existência de simultaneidade absoluta. Poderá acontecer que até a ordem temporal de dois eventos pode ser trocada para observadores distintos? Isto é, poderá a causa de um efeito para um observador \mathcal{O} , ser posterior ao efeito para um outro observador \mathcal{O}' ? Obviamente isto causaria problemas de causalidade!

Para ser mais preciso, consideremos uma causa em $x_1 = 0, t_1 = 0$ e o seu efeito em $x_2 = L, t_2 = T$. A velocidade do fenómeno é $V = L/T$. Um observador, \mathcal{O}' , movendo-se com velocidade v , verá a causa em $t'_1 = 0$ e o efeito quando

$$ct'_2 = \frac{cT - vL/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (1.5.20)$$

Para \mathcal{O}' , o efeito precederá a causa se $t'_2 < 0$, ou seja se

$$vV > c^2. \quad (1.5.21)$$

Para esta condição ser obedecida, uma das velocidades terá de ser maior do que a velocidade da luz. Por isso, para evitar problemas de causalidade devemos *exigir que velocidades*

maiores do que a velocidade da luz não ocorram. Esta afirmação é tão solene que convida a desafia-la! Devido à sua importância vamos discutir três aspectos relacionados com ela.

Primeiro, esta frase reflecte a consistência lógica da relatividade restrita. É consistente com a propriedade das transformações de Lorentz que por adição de velocidades não é possível ultrapassar a velocidade da luz e será reforçada pelas observações da próxima secção de que uma partícula material não poderá ser acelerada de velocidade menor do que a da luz até à velocidade da luz.

Segundo, devemos enfatizar que esta limitação é apenas para velocidades de objectos materiais ou para processos que podemos começar voluntariamente no primeiro ponto e que por isso são susceptíveis de transmitir informação. Para clarificar este ponto consideremos duas experiências conceptuais.

Considere-se, como na Fig. 1.10, uma lâmina (como de uma tesoura) em repouso e outra movendo-se com velocidade V_0 . O ponto de intersecção das duas lâminas P , move-se com velocidade $V = V_0/\sin \alpha$ para a direita. Escolhendo α pequeno, podemos tornar V arbitrariamente grande, mesmo excedendo a velocidade da luz c . Embora a chegada de P possa cortar um dedo (ou uma garganta!), o ponto P é imaterial e não transmite informação. Informação seria transmitida se pudessemos começar o movimento da lâmina (2) num tempo pré-definido, simultaneamente em todo o seu comprimento, actuando somente em P . Este é o paradigma do *corpo rígido*. Mas nenhuma lâmina material pode ser completamente rígida. O seu movimento é comunicado por processos moleculares causais. Invertendo o argumento: *a relatividade restrita proibe a existência de corpos completamente rígidos.*

A segunda experiência conceptual usa um laser apontado à Lua. Ao mudar a direcção do laser, o ponto onde ele atinge a Lua pode-se mover na sua superfície com velocidades arbitrariamente grandes - mas a causa está na Terra e não no ponto onde o laser primeiro atinge a Lua!

A nossa terceira observação lida com uma hipótese especulativa. A relatividade restrita não exclui partículas com velocidade maior do que a da luz, desde que estas não possam ser usadas para transmitir informação, isto é, desde que não possam ser geradas pela, ou não interajam com, a matéria usual. Tais partículas hipotéticas denominam-se *taquiões*.

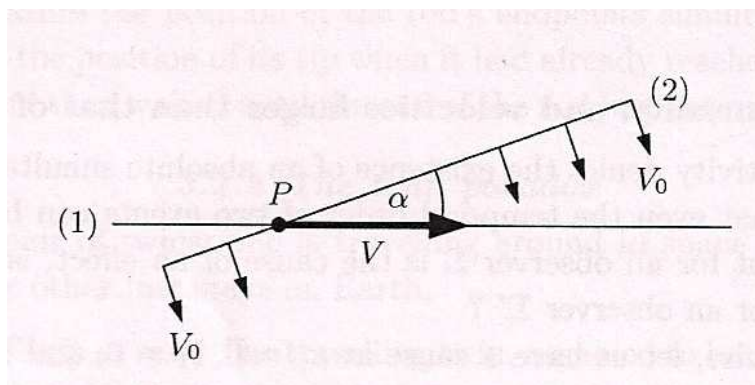


Figura 1.10: Lâminas em movimento. Retirado de [1]

Portanto, embora possamos *definir* velocidades que excedem a da luz (como nas experiências conceptuais anteriores, ou, por exemplo, velocidades de fase de ondas em meios dispersivos), este facto não contradiz a nossa afirmação.

Parece-nos apropriado que as leis da física não devem permitir-nos alterar o passado e que a causalidade não deve ser posta em causa. Mas não existe uma maneira lógica de excluir a possibilidade de que futuras experiências possam por em causa a teoria da relatividade. Contudo, até ao momento, a relatividade restrita tem passado todos os testes experimentais.

1.6 Mecânica relativista

A relatividade restrita nasce da electrodinâmica clássica e demonstra que a mecânica clássica pode apenas ser válida como uma aproximação de pequenas velocidades. Consideremos por isso agora, brevemente, a mecânica relativista.

1.6.1 Cinemática

A mecânica Newtoniana tem o grupo de Galileu como grupo de simetria. Mas a mecânica relativista deve ser invariante pelo grupo de Lorentz. Para evitar cometer erros na sua formulação usamos desde logo apenas invariantes e 4-vectores.

Na mecânica não relativista, o movimento de uma partícula pontual é descrito através

da sua posição como função do tempo, $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Por vezes também se usa o comprimento da trajectória l , definido por

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad x = x(l), y = y(l), z = z(l), t = t(l). \quad (1.6.1)$$

Na mecânica relativista, dado que queremos uma notação que incorpore espaço e tempo democraticamente, escolhemos o *tempo próprio*, definido por

$$-c^2 d\tau^2 = ds^2 = dx_\nu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.6.2)$$

como o nosso parâmetro, e descrevemos a *linha de mundo da partícula* como

$$x^\nu(\tau) = (ct(\tau), \vec{r}(\tau)). \quad (1.6.3)$$

Escrevendo (1.6.2) na forma

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{d\vec{r}^2}{c^2 dt^2} \right) = -c^2 dt^2 (1 - v^2/c^2), \quad (1.6.4)$$

verificamos que

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.6.5)$$

Aqui, $v = v(\tau)$ é a velocidade da partícula que, em geral, poderá não ser constante. Para uma partícula em repouso, o tempo próprio coincide com o tempo coordenado.

Usando como ingredientes apenas a representação da linha de mundo $x^\nu = x^\nu(\tau)$ e o parâmetro τ , existe um único 4-vector que generalisa a 3-velocidade, denominado *4-velocidade*, u^ν , definido por

$$u^\nu(\tau) = \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{dx^\nu}{dt \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \quad (1.6.6)$$

Dada a definição de tempo próprio (1.6.2), a 4-velocidade está normalizada, isto é

$$u_\nu u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx_\nu}{d\tau} = -c^2. \quad (1.6.7)$$

Esta equação demonstra que as quatro componentes da 4-velocidade não são independentes umas das outras, e que u^ν generalisa o vector tangente $d\vec{r}/dl$, que tem sempre comprimento 1.

De um modo semelhante definimos a *4-aceleração*, \dot{u}^ν (nesta secção o ‘ponto’ significa derivada relativamente ao tempo próprio) por

$$\dot{u}^\nu = \frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} . \quad (1.6.8)$$

Devido à normalização da 4-velocidade, temos que

$$0 = \frac{d(u^\nu u_\nu)}{d\tau} = 2\dot{u}^\nu u_\nu . \quad (1.6.9)$$

Ou seja, a 4-velocidade e a 4-aceleração são sempre ortogonais.

Dado que em geral $v(\tau)$ não é constante, uma partícula acelerada não pode ser transformada numa partícula em repouso por uma transformação de Lorentz. Mas isto é possível para cada instante de tempo, o que define o *referencial momentaneamente co-móvel com a partícula*. Para cada τ_0 , nesse referencial temos

$$u^\nu(\tau_0) = (c, 0, 0, 0) . \quad (1.6.10)$$

1.6.2 Equações do movimento

Dado que as equações do movimento de Newton não são invariantes por transformações de Lorentz, quais as equações de movimento relativistas?

Para o descobrirmos, o caminho natural é imitar a Mecânica Newtoniana e requerer que as equações do movimento tenham a forma ‘aceleração é proporcional à força’; assim requeremos a forma

$$m_0 \frac{d^2x^\nu}{d\tau^2} = f^\nu . \quad (1.6.11)$$

A constante m_0 é denominada *massa própria* ou *massa em repouso* e o 4-vector f^ν , *4-força*.

Dado que a equação (1.6.11) está completamente escrita em termos de 4-vectores (força e aceleração) e um invariante (massa própria), ela é certamente invariante por transformações de Lorentz. Mas será a equação correcta para descrever a natureza?

Uma maneira de testar a equação é examinar o limite Newtoniano ($v/c \ll 1$). Como podemos ver da forma da 4-velocidade (1.6.6), as equações do movimento Newtonianas devem surgir da parte espacial de (1.6.11). Mas como estará a 3-força contida em f^ν ? A

resposta a esta pergunta pode ser obtida analisando o caso electromagnético. Não faremos aqui essa análise mas pode ser encontrada em [1]. A resposta é que f^ν tem a forma

$$f^\nu = \left(f^0, \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad (1.6.12)$$

onde a componente zero f^0 permanece, para já, indeterminada.

Podemos agora analisar as componentes espaciais das equações do movimento (1.6.11). Obtemos

$$m_0 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1.6.13)$$

ou, equivalentemente, usando (1.6.5)

$$\frac{d}{dt} m \vec{v} = \vec{F}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.6.14)$$

Quando $v \ll c$ esta é, de facto, a equação Newtoniana, com m e m_0 coincidentes. Em geral, contudo, embora tenha a forma da equação Newtoniana, existe uma *massa dependente da velocidade*, m . Mas é de qualquer forma surpreendente que a forma ainda seja a da mecânica Newtoniana!

Para velocidades elevadas, a massa m cresce, tendendo para infinito quando v se aproxima de c . Este *crescimento da inércia* fornece uma razão dinâmica para a impossibilidade de uma partícula material chegar à velocidade da luz: uma força finita não pode acelerar uma partícula material de modo à sua velocidade atingir a da luz num tempo finito.

Acontece que, para além das componentes espaciais, a equação (1.6.11) tem uma componente temporal. Então que nova lei se encontra aqui escondida? A resposta é simples, mas surpreendente. Começemos por determinar f^0 . Para isso escrevemos (1.6.11) na forma

$$m_0 \dot{u}^\nu = f^\nu, \quad (1.6.15)$$

e contraímos esta equação com u_ν . Usando a perpendicularidade entre 4-velocidade e 4-aceleração obtemos

$$f^\nu u_\nu = 0. \quad (1.6.16)$$

Ou seja, a força é perpendicular à 4-velocidade. Escrevendo explicitamente esta relação em termos das componentes, usando (1.6.6) e (1.6.12) obtemos que

$$f^0 = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (1.6.17)$$

Usando este resultado, a componente temporal de (1.6.11) fica

$$\frac{d}{dt}mc^2 = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.6.18)$$

Para interpretarmos a última relação, recordemos que um resultado semelhante aparece na mecânica Newtoniana se fizermos o produto escalar da segunda lei para uma partícula pontual (de modo a que a massa não varie), $m\vec{v}/dt = \vec{F}$ com a velocidade \vec{v} ; obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2 \right) = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.6.19)$$

Esta equação diz-nos que a energia cinética da partícula varia com o tempo devido à *potência transmitida à partícula pela força que nela actua*. Portanto esta é uma equação de balanço energético. Analogamente interpretamos (1.6.18) como uma equação de balanço energético: *diz-nos como varia a energia da partícula devido à potência transmitida por uma força exterior que nela actua*.

Esta interpretação é apoiada fazendo um desenvolvimento de mc^2 em potências de v/c :

$$mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m_0c^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (1.6.20)$$

Esta quantidade é interpretada como a energia da partícula,

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1.6.21)$$

e contém, para além da energia cinética Newtoniana, um termo da massa em repouso m_0c^2 , bem como correções em v/c .

A equação (1.6.21) é a famosa *relação massa-energia* derivada por Einstein em 1905. Como, a energia cinética pode ser convertida noutras formas de energia, argumentou-se que também a massa em repouso que entra na energia relativista deveria ser transformável noutras formas de energia. Sabemos hoje que assim é (exemplo: reacções nucleares).

Uma definição que segue naturalmente deste formalismo é a de *4-momento*, que é simplesmente a 4-velocidade multiplicada pela massa em repouso:

$$p^\nu = m_0 u^\nu = \left(\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \left(\frac{E}{c}, m\vec{v} \right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) . \quad (1.6.22)$$

A normalização da 4-velocidade implica imediatamente que

$$p^\nu p_\nu = -m_0^2 c^2 . \quad (1.6.23)$$

As equações do movimento (1.6.11) pode agora ser escrita

$$\dot{p}^\nu = f^\nu , \quad (1.6.24)$$

e podem ser interpretadas como as equações de balanço do 4-momento.

Uma motivação Física para a Relatividade Geral

Neste capítulo iremos rever algumas ideias básicas da gravitação Newtoniana, da sua construção, dos seus sucessos e das suas inconsistências com a relatividade restrita. Esta discussão terminará com uma lista de objectivos para um teoria relativista da gravidade.

2.1 A gravitação Newtoniana: sucessos e um pequeno problema

2.1.1 A lei $1/r^2$

A interacção gravítica é, de todas as interacções fundamentais, aquela que é conhecida há mais tempo. Newton quantificou-a através da sua lei da atracção universal:

$$\vec{F} = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \hat{r}, \quad G = 6.6720 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ Kg}^{-1}. \quad (2.1.1)$$

Como descobriu Newton a lei do inverso do quadrado?

- 1) A primeira observação que leva a esta lei relaciona-se com o movimento da Lua.
Assumindo que:
 - As leis da mecânica postuladas por Newton também se aplicam aos corpos celestes;

- Como primeira aproximação a Lua se move numa órbita circular em torno da Terra, com raio R , período T e velocidade linear $v = 2\pi R/T$;
- A aceleração centrípeta que mantém a Lua em órbita é devida á atracção gravítica da Terra e não depende da massa da Lua (*princípio de equivalência de Galileu*). Esta aceleração é dada por

$$a = \frac{v^2}{R} = \left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2 \frac{1}{R} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R . \quad (2.1.2)$$

Newton conhecia a distância R até à Lua (esta distância já era conhecida dos gregos antigos, usando a paralaxe da Lua vista de diferentes pontos da Terra); dado que também conhecia o seu período de revolução em torno da Terra, podia calcular a sua aceleração. Usando valores modernos

$$R = 3.84 \times 10^5 \text{ km} , T = 2.36 \times 10^6 \text{ s (27.3 dias)} \Rightarrow a = 0.0027 \text{ ms}^{-2} . \quad (2.1.3)$$

Comparada com a aceleração gravitacional à superfície da Terra:

$$\frac{a_{\text{Terra}}}{a_{\text{Lua}}} = \frac{9.8}{0.0027} \simeq 3600 . \quad (2.1.4)$$

Por outro lado, comparando o raio da Terra com o raio da órbita da Lua,

$$\frac{R_{\text{Lua}}}{R_{\text{Terra}}} = \frac{3.84 \times 10^5 \text{ km}}{6380 \text{ km}} \simeq 60 . \quad (2.1.5)$$

Logo,

$$\frac{a_{\text{Terra}}}{a_{\text{Lua}}} = \left(\frac{R_{\text{Lua}}}{R_{\text{Terra}}}\right)^2 \Rightarrow a_{\text{Terra}} R_{\text{Terra}}^2 = a_{\text{Lua}} R_{\text{Lua}}^2 = \text{constante} ; \quad (2.1.6)$$

ou seja, sugere uma lei do tipo

$$a \propto \frac{1}{R^2} . \quad (2.1.7)$$

- 2) A segunda observação de Newton relaciona-se com a terceira lei de Kepler. Kepler mostrou que para as órbitas dos diferentes planetas do sistema solar (até Saturno, que eram os únicos que ele conhecia), a razão

$$\frac{T^2}{R^3} \simeq \text{constante} .$$

A seguinte tabela - extraída de [6] - contém esta razão para os planetas do sistema solar (note que aqui R é o raio médio da órbita).

Planeta	R (10^6 km / U. Astronómicas)	τ (anos)	τ^2/R^3 (10^{-10} s ² km ⁻³)
Mercúrio	57.9/0.387	0.241	2.98
Vénus	108.2/0.72	0.615	2.97
Terra	149.6/1.00	1.00	2.97
Marte	228.0/1.52	1.88	2.97
Júpiter	778.3/5.20	11.86	2.97
Saturno	1429.4/9.54	29.46	2.99
Úrano	2871.0/19.22	84.01	2.98
Neptuno	4504/30.06	164.1	2.97
Plutão	5913.5/39.5	247.0	2.97

Newton observou que esta aparentemente estranha relação evidenciava a lei do inverso do quadrado da distância. De facto, substituindo a equação (2.1.2) na forma

$$T^2 = \frac{4\pi^2 R}{a}, \quad (2.1.8)$$

na terceira lei de Kepler (2.1.1), obtemos

$$\frac{4\pi^2}{aR^2} \simeq \text{constante} \quad \Rightarrow \quad a \propto \frac{1}{R^2}, \quad (2.1.9)$$

em concordância com o derivado da órbita lunar.

Embora este argumento fosse encorajador, para se convencer da validade da lei $1/R^2$, Newton necessitou de mostrar que as órbitas elípticas resultavam desta lei, dado que a primeira lei de Kepler afirmava a sua existência - exercício 2.1. Para isso Newton teve de inventar o cálculo infinitesimal!

Resumindo: Newton mostrou que a lei do inverso do quadrado fazia um óptimo ajuste aos dados experimentais provenientes quer do movimento da Lua, quer do movimento dos planetas - e como tal às leis de Kepler.

Exercício 2.1: O problema de Kepler. Considere uma partícula de massa m actuada pela potencial Kepleriano de uma massa M . O Lagrangeano que descreve a dinâmica é, em coordenadas esféricas:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) + G \frac{mM}{r}, \quad (2.1.10)$$

onde o ‘ponto’ significa derivada em ordem ao tempo. Deduza as órbitas possíveis para a partícula.

Resolução: As equações de Euler-Lagrange para as variáveis r , θ e ϕ são, respectivamente:

$$m\ddot{r} = -G \frac{mM}{r^2} + mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2); \quad (2.1.11)$$

$$mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = m \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}); \quad (2.1.12)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}) = 0. \quad (2.1.13)$$

Da última equação resulta que

$$j \equiv r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \quad (2.1.14)$$

é uma quantidade conservada. A existência desta quantidade conservada é óbvia se observarmos que o Lagrangiano não depende de ϕ e como tal o seu momento canónico conjugado é conservado (teorema de Noether). Como ϕ é um ângulo, o seu momento canónico conjugado é um momento angular. De facto, dado o momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, a sua componente z é

$$L_z = m(xy\dot{z} - y\dot{x}z) = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = mj; \quad (2.1.15)$$

logo j é a componente z do momento angular por unidade de massa.

A equação (2.1.12) é resolvida por

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (2.1.16)$$

De facto esta solução particular pode ser tomada como geral, dado que devido à simetria esférica, e conseqüente conservação do momento angular, o movimento é planar e o plano do movimento pode ser tomado como sendo o plano $\theta = \pi/2$.

Usando (2.1.14) e (2.1.16) na equação radial (2.1.11), obtemos

$$m\ddot{r} = -G\frac{mM}{r^2} + m\frac{j^2}{r^3}, \quad (2.1.17)$$

ou, multiplicando esta equação por \dot{r} e integrando em ordem ao tempo,

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - G\frac{Mm}{r} + \frac{mj^2}{2r^2} = E, \quad (2.1.18)$$

onde E é uma constante de integração que pode ser interpretada como a energia da partícula. Verificamos pois que existe um potencial efectivo, que determina a dinâmica, com a forma

$$V_{\text{efe}}(r) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{mj^2}{2r^2}. \quad (2.1.19)$$

Este potencial - representado na Fig. 2.1 - tem um termo atrativo (primeiro) e outro repulsivo (segundo). O movimento pode ser descrito do seguinte modo:

Se $j = 0$ (painel da esquerda), as órbitas com $E < 0$ ou com $E \geq 0$ e $\dot{r} < 0$ vão cair para $r = 0$ - *estados de absorção*. Por outro lado, as órbitas com $E \geq 0$ e $\dot{r} > 0$ vão escapar para o infinito - *estados livres*.

Se $j \neq 0$ (painel da direita), as órbitas com $E < 0$ deslocam-se entre um raio mínimo e um raio máximo - *estados ligados*. Veremos de seguida que correspondem a órbitas elípticas que degeneram numa órbita circular para a energia mínima. Por outro lado, as órbitas com $E \geq 0$ vão escapar para o infinito - *estados de difusão*. Veremos que correspondem a órbitas parabólicas ou hiperbólicas.

Para compreendermos quantitativamente as órbitas temos de resolver a equação radial (2.1.17). Para isso é conveniente reexpressarmos esta equação em termos de uma nova variável dependente:

$$r(t) \longrightarrow u(\phi), \quad \text{onde} \quad u = \frac{1}{r}. \quad (2.1.20)$$

Observemos que

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\phi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{1}{\dot{\phi}} = -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\phi}} = -\frac{\dot{r}}{j}; \quad (2.1.21)$$

e ainda

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{du}{d\phi} \right) = \frac{dt}{d\phi} \frac{d}{dt} \left(-\frac{\dot{r}}{j} \right) = \frac{1}{\dot{\phi}} \left(-\frac{\ddot{r}}{j} \right) = -\frac{r^2 \ddot{r}}{j^2}; \quad (2.1.22)$$

logo

$$\ddot{r} = -j^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2}. \quad (2.1.23)$$

A equação radial (2.1.17) fica então, em termos da variável u ,

$$-mj^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} = -GmMu^2 + mj^2 u^3 \Leftrightarrow \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{j^2}. \quad (2.1.24)$$

Esta é uma equação do tipo da de um oscilador harmónico (em ϕ):

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(u - \frac{GM}{j^2} \right) + \left(u - \frac{GM}{j^2} \right) = 0 \Rightarrow u = \frac{GM}{j^2} + A \cos(\phi - \phi_0), \quad (2.1.25)$$

onde A e ϕ_0 são duas constantes de integração. Daqui se deduz que a solução para a variável r é:

$$r(\phi) = \frac{1}{GM/j^2 + A \cos(\phi - \phi_0)} = \frac{\frac{j^2}{GM}}{1 + \frac{Aj^2}{GM} \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (2.1.26)$$

Em coordenadas polares, a equação de uma curva cónica com excentricidade ϵ e semi-eixo maior a é dada por:

$$r(\phi) = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (2.1.27)$$

Como é bem sabido, a curva com $\epsilon = 0$ é uma circunferência, com $0 < \epsilon < 1$ é uma elipse, com $\epsilon = 1$ é uma parábola e com $\epsilon > 1$ é uma hipérbole. Logo, a órbita encontrada é uma cónica com

$$\epsilon = \frac{Aj^2}{GM}, \quad a(1 - \epsilon^2) = \frac{j^2}{GM}. \quad (2.1.28)$$

Para encontrarmos a correspondência entre a energia do movimento e cada tipo de curva, substituímos (2.1.26) nas várias dependências radiais de (2.1.18); observando primeiro que diferenciando (2.1.26) em ordem ao tempo obtemos

$$\dot{r} = \frac{A\dot{\phi} \sin(\phi - \phi_0)}{(GM/j^2 + A \cos(\phi - \phi_0))^2} = A\dot{\phi} r^2 \sin(\phi - \phi_0) = Aj \sin(\phi - \phi_0), \quad (2.1.29)$$

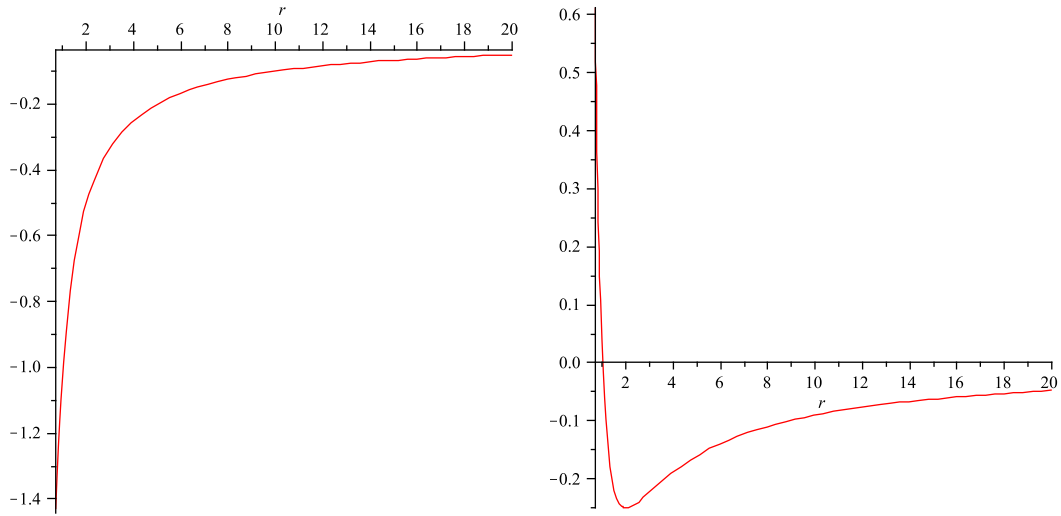


Figura 2.1: O potencial efectivo (2.1.19) para $j = 0$ (painel da esquerda) e $j \neq 0$ (painel da direita).

e logo

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{mA^2j^2}{2} [1 - \cos^2(\phi - \phi_0)] = \frac{mj^2}{2} \left[A^2 - \left(\frac{1}{r} - \frac{GM}{j^2} \right)^2 \right], \quad (2.1.30)$$

obtemos de seguida para (2.1.18):

$$\frac{mj^2}{2} \left[A^2 - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2GM}{rj^2} + \frac{(GM)^2}{j^4} \right) \right] - G\frac{Mm}{r} + \frac{mj^2}{2r^2} = E. \quad (2.1.31)$$

Logo

$$\frac{mj^2}{2} \left[A^2 - \frac{(GM)^2}{j^4} \right] = E, \quad (2.1.32)$$

ou, expressando a amplitude em termos da excentricidade por via de (2.1.28),

$$E = \frac{m(GM)^2}{2j^2} (\epsilon^2 - 1). \quad (2.1.33)$$

Os estados ligados ($E < 0$) correspondem, como esperado, às cónicas fechadas (circunferência e elipse, que têm $\epsilon < 1$; os estados de difusão ($E \geq 0$) correspondem às cónicas abertas (parábola e hipérbole), que têm $\epsilon \geq 1$.

2.1.2 A descoberta de Neptuno e a anomalia de Mercúrio

A teoria Newtoniana teve um dos seus grandes triunfos ao ser usada para prever a existência de um novo planeta - Neptuno. Este acontecimento teve lugar na sequência da descoberta do planeta Úrano, atribuída a William Herschel (1738-1822), em 1781, que foi o primeiro planeta descoberto usando o telescópio. Em 1821, Alexis Bouvard (1767-1843) publicou tabelas astronómicas para a órbita de Úrano, baseadas na teoria Newtoniana e levando em conta as perturbações dos planetas conhecidos. Contudo, as observações dos anos seguintes evidenciaram desvios substanciais relativamente a estas tabelas, levando Bouvard a formular a hipótese que a órbita de Úrano estava a ser perturbada pela interacção gravitacional com um corpo desconhecido. Esta ideia foi desenvolvida e trabalhada independentemente por John C. Adams (1819-1892) e Urbain Le Verrier (1811-1877), que usaram a teoria de perturbações Newtoniana para prever as características do corpo perturbador de modo a explicar as observações. Le Verrier convenceu o astrónomo do observatório de Berlim, Johann Gottfried Galle (1812-1910), a procurar o corpo perturbador, para o qual Le Verrier fez uma previsão precisa da sua localização. Na mesma noite em que recebeu a carta de Le Verrier, a 23 de Setembro de 1846, Galle descobriu Neptuno, a menos de 1º da localização prevista por Le Verrier (e a menos de 12º da previsão que Adams havia feito para a mesma altura).

Este extraordinário sucesso ‘canonizou’ a teoria Newtoniana da gravidade. Havia, no entanto, um pequeno detalhe que esta teoria não explicava convenientemente: *o avanço do periélio da órbita de Mercúrio*.

Como é manifesto do episódio da descoberta de Neptuno, no sec. XIX, as observações astronómicas tornaram-se tão precisas que se tornou aparente que as órbitas não eram elipses perfeitas, como deveria ser o caso se os planetas se movessem apenas pela acção do campo gravitacional do Sol; o efeito do campo gravitacional dos outros planetas causava pequenos, mas mensuráveis, desvios às elipses.

Para compreendermos qualitativamente um efeito importante consideremos, por exemplo, o efeito de Júpiter na órbita de Mercúrio em torno do Sol. Começamos por observar

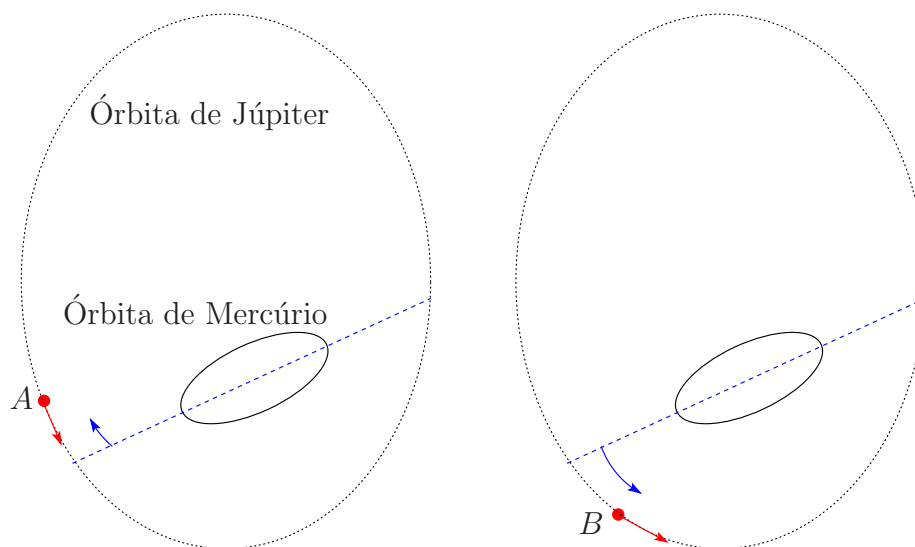


Figura 2.2: Efeito qualitativo de Júpiter na órbita de Mercúrio. Consideramos a órbita de Mercúrio como uma distribuição de massa ao longo da elipse. Quer na posição A quer na posição B as forças de maré tendem a reorientar o prolongamento do eixo maior (linha azul tracejada) com Júpiter (ponto vermelho); este movimento é ilustrado pelas setas azuis. O efeito, contudo, é mais prolongado quando Júpiter se encontra à frente do prolongamento do eixo maior - posição B - originando um avanço do periélio de Mercúrio no sentido do movimento de Júpiter.

que o período das órbitas de Mercúrio e de Júpiter são, respectivamente,

$$T_{\text{Mercúrio}} = 0.241 \text{ anos} \quad T_{\text{Júpiter}} = 11.86 \text{ anos} . \quad (2.1.34)$$

Logo, Mercúrio fará quase 50 revoluções em torno do Sol enquanto Júpiter fará apenas uma. Podemos por isso pensar na órbita de Mercúrio não como espaço vazio, mas sim como uma linha ao longo da qual a massa se encontra distribuída - Fig 2.2.

Quando Júpiter se encontra próximo do prolongamento do eixo maior da órbita de Mercúrio, haverá um efeito gravítico que tenta alinhar o prolongamento do eixo com Júpiter (efeito de maré semelhante ao que sincroniza o período de translação e rotação da Lua). Mas Júpiter move-se; quando se aproxima do prolongamento do eixo, puxa-o para si, isto é para ‘trás’. Depois de ultrapassar o prolongamento do eixo continua a puxa-lo para si, que agora será para a ‘frente’. Existe, contudo, uma assimetria nas duas situações, dado que a segunda tem uma duração superior à primeira. O efeito total é que o periélio de Mercúrio se vai deslocar para a frente, isto é, no mesmo sentido do movimento de Júpiter.

Usando teoria de perturbações (a mesma que havia confirmado espectacularmente a teoria Newtoniana) levando à previsão do planeta Neptuno, os astrónomos podiam calcular a contribuição dos vários planetas para o avanço do periélio de Mercúrio. Os resultados encontram-se na seguinte tabela (extraída de [7]):

Causa	Razão (arcsec/século)
Precessão Geral (ano 1900)	5025.6''
Vénus	277.8''
Terra	90.0''
Marte	2.5''
Júpiter	153.6''
Saturno	7.3''
Outros	0.2''
Soma	5557.0''
Avanço observado	5599.7''
Discrepância	42.7''

A discrepância foi denominada *avanço anómalo do periélio de Mercúrio*. Alguns astrónomos, entre os quais Le Verrier, tentaram resolver o problema pelo mesmo caminho bem sucedido que levou à previsão e descoberta de Neptuno: postulando um novo planeta interior a Mercúrio - sugestivamente referido como *Vulcano*, mas este nunca foi encontrado. Outra tentativa foi modificar a lei do inverso do quadrado para

$$F \propto \frac{1}{r^{2+\epsilon}} . \quad (2.1.35)$$

Se $\epsilon > 0$ ($\epsilon < 0$) é obtida uma precessão para a frente (trás), isto é, no sentido da órbita (contrário à órbita) do planeta. Uma tal modificação pode ser equivalentemente considerada estudando o potencial gravitacional

$$\phi = -\frac{GM}{r} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^3} + \dots \quad (2.1.36)$$

De facto, considerando apenas a primeira correcção e ajustando apropriadamente β é possível explicar o avanço anómalo do periélio de Mercúrio - Exercício 2.2. Contudo tal

alteração mostrava-se incoerente com observações cada vez mais precisas da órbita lunar.

O problema apenas será resolvido pela Relatividade Geral.

Exercício 2.2: O problema de Kepler com uma modificação em $1/r^2$. Considere uma partícula de massa m num potencial gravitacional descrito pelo potencial de Kepler de uma massa M com um termo extra (sub-dominante para distâncias elevadas). O Lagrangeano que descreve a dinâmica é, em coordenadas esféricas:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right) + G \frac{mM}{r} - \frac{m\beta}{r^2}, \quad (2.1.37)$$

onde β é uma constante.

- Resolva as equações do movimento e deduza a equação das órbitas. Verifique que, se β for apropriadamente pequeno, o novo termo pode ser visto como introduzindo um avanço do periélio às órbitas cónicas do Exercício 2.1.
- Deduza uma expressão em termos de M e β , bem como dos parâmetros orbitais - a (semi-eixo maior), ϵ (excentricidade) e τ (período) para a velocidade angular do avanço do periélio de uma órbita aproximadamente elíptica.
- Para Mercúrio ($a = 57.9 \times 10^9 m$, $\epsilon = 0.206$, $\tau = 0.241$ anos) o avanço anómalo do periélio é de $\omega \simeq 42.7$ arcsec/século. Calcule o valor de β de modo a que este Lagrangeano seja compatível com esta observação.

Resolução: a) A resolução segue exactamente a do Exercício 2.1 com as seguintes alterações. A equação radial (2.1.17) fica

$$m\ddot{r} = -G \frac{mM}{r^2} + m \frac{j^2 + 2\beta}{r^3}, \quad (2.1.38)$$

pelo que a equação radial em termos de u , (2.1.24) fica,

$$-mj^2u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} = -GmMu^2 + m(j^2 + 2\beta)u^3 \Leftrightarrow \frac{d^2u}{d\phi^2} + \omega^2u = \frac{GM}{j^2}, \quad (2.1.39)$$

onde definimos

$$\omega^2 \equiv 1 + \frac{2\beta}{j^2} . \quad (2.1.40)$$

Logo, temos ainda uma equação do tipo da de um oscilador harmónico (em ϕ):

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(u - \frac{GM}{j^2\omega^2} \right) + \omega^2 \left(u - \frac{GM}{j^2\omega^2} \right) = 0 \Rightarrow u = \frac{GM}{j^2\omega^2} + A \cos(\omega[\phi - \phi_0]) , \quad (2.1.41)$$

onde A e ϕ_0 são duas constantes de integração. Daqui se deduz que a solução para a variável r é:

$$r(\phi) = \frac{\frac{j^2\omega^2}{GM}}{1 + \frac{Aj^2\omega^2}{GM} \cos(\omega[\phi - \phi_0])} . \quad (2.1.42)$$

Esta equação já não é do tipo (2.1.27) e portanto a trajectória não é uma curva cónica.

Contudo, se

$$1 \simeq \omega = \sqrt{1 + \frac{2\beta}{j^2}} \simeq 1 + \frac{\beta}{j^2} \Leftrightarrow \frac{\beta}{j^2} \ll 1 , \quad (2.1.43)$$

as órbitas serão aproximadamente cónicas com

$$\epsilon \simeq \frac{Aj^2}{GM} , \quad a(1 - \epsilon^2) \simeq \frac{j^2}{GM} , \quad (2.1.44)$$

mas com uma característica qualitativamente nova. O periélio é atingido quando

$$\omega[\phi - \phi_0] = 2\pi n , \quad n \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow \phi = \phi_0, \phi_0 + \frac{2\pi}{\omega}, \dots \quad (2.1.45)$$

pelo que em cada revolução o periélio avança

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\omega} - 2\pi \simeq -\frac{2\pi\beta}{j^2} . \quad (2.1.46)$$

Observe que para o periélio de facto avançar, $\beta < 0$.

b) A velocidade angular do avanço do periélio é (expressando o período τ da órbita em anos)

$$\omega_{ap} \simeq -\frac{2\pi\beta}{j^2\tau} = -\frac{2\pi\beta}{GMa(1 - \epsilon^2)\tau} \text{ rad/ano} = -\frac{360 \times 3600 \times 100\beta}{GMa(1 - \epsilon^2)\tau} \text{ arcsec/sec} . \quad (2.1.47)$$

c) Usando para a massa do Sol $M = 1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$, obtemos

$$\beta = -5.81 \times 10^{23} \text{ J} \cdot \text{m}^2/\text{kg} . \quad (2.1.48)$$

2.2 A gravitação Newtoniana e a relatividade restrita: inconsistências

A força gravítica Newtoniana exercida por uma massa pontual M pode ser derivada do potencial

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \quad (2.2.1)$$

que por sua vez resolve, para o caso de uma massa pontual, a equação de campo da gravitação Newtoniana: a equação de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho, \quad (2.2.2)$$

onde ρ representa a densidade de massa. Com a formulação da relatividade restrita (1905) tornou-se claro que esta equação deveria ser modificada de modo a tornar-se invariante perante o grupo de Lorentz (ou de Poincaré). De facto:

- no lado direito da equação aparece a densidade de massa ρ , que é dependente do observador. A densidade de massa é a massa por unidade de volume $\rho = m/V$. Se um determinado observador mede uma densidade de massa ρ , um observador que se move relativamente a ele com velocidade v mede uma densidade de massa

$$\rho' = \frac{m'}{V'} \stackrel{(1.5.18)}{=} \frac{m'}{V} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \stackrel{(1.6.21)}{=} \frac{m}{V} \frac{1}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^2} \equiv \gamma^2 \rho, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (2.2.3)$$

Note-se o factor de γ^2 reflectindo a contração do comprimento na direcção do movimento e o aumento da inércia. Logo o lado direito de (2.2.2) não é um invariante.

- No lado esquerdo da equação aparece um operador apenas com derivadas espaciais; a ausência de derivadas temporais mostra que, na gravitação Newtoniana, o campo se propaga com velocidade infinita; isto é, aparece instantaneamente, o que é inconsistente com a causalidade relativista.

Para compreendermos melhor o último argumento consideremos as duas seguintes situações. Em primeiro lugar consideremos que (isto é uma *Gedankenexperiment*) o Sol

desaparece. Quanto tempo demora o planeta Terra a sentir que o campo gravítico do Sol desapareceu e conseqüentemente a mudar a sua órbita de aproximadamente elíptica para rectilínea? Na gravitação Newtoniana a resposta é: instantaneamente. Contudo a causalidade relativista estabelece que nenhum sinal se pode propagar a uma velocidade superior a c , a velocidade da luz no vázio.

Em segundo lugar consideramos uma situação análoga numa teoria de campo relativista: o electromagnetismo. Consideramos que uma pequena carga se desloca no campo de um dipolo eléctrico. Num certo instante o dipolo é feito oscilar. Quanto tempo demora a pequena carga a sentir a alteração do campo electromagnético? A resposta é: o tempo necessário para que a onda electromagnética resultante da oscilação do dipolo atinja a carga. Isto porque no electromagnetismo, uma flutuação do campo se propaga com uma certa velocidade (que é exactamente a velocidade da luz). Matematicamente existem, no vázio equações de onda, (1.2.6) e (1.2.9), que reescrevemos

$$\square A_\mu = 0, \quad (2.2.4)$$

onde $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ é o 4-vector potencial electromagnético.

Na teoria relativista da gravitação podemos esperar que flutuações do campo gravítico se propaguem como ondas gravitacionais e que exista uma equação de onda, o que não acontece na teoria Newtoniana.

Exercício 2.3: Estrelas de Mitchell. Deduza a relação, em gravitação Newtoniana, entre o raio R e a massa M de uma ‘estrela’ cuja velocidade de escape seja igual à velocidade da luz c .

Resolução: Consideramos a conservação de energia mecânica para um corpo de massa m entre a superfície da estrela, de onde sai com velocidade c e o infinito, onde chega com velocidade nula:

$$-\frac{GmM}{R} + \frac{1}{2}mc^2 = 0 + 0 \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.2.5)$$

Uma nota histórica. Em 1783, o reverendo John Mitchell (1729-1793), um astrónomo britânico amador, propôs que a gravidade poderia afectar a luz tal como afectava a matéria (note-se a não trivialidade desta proposta numa altura em que a natureza da luz não era clara). Por um raciocínio análogo ao cálculo anterior, Mitchell concluiu que poderiam existir corpos com uma atracção gravitacional tão intensa que “toda a luz emitida por eles iria voltar a cair no corpo”. Estes objectos hipotéticos foram denominados *estrelas de Mitchell*.

Em 1795, Pierre Simon Laplace (1749-1827), independentemente, chegou à mesma conclusão e argumentou que “é portanto possível que os grandes corpos luminosos do universo sejam, por esta razão, invisíveis.”

A relação (2.2.5), curiosamente, será obtida exactamente na mesma forma em relatividade geral, para o raio areal R do horizonte de acontecimentos de um buraco negro de massa M , chamado raio de Schwarzschild. Mas, como veremos, a interpretação física de um buraco negro em relatividade geral será muito diferente da de uma estrela de Mitchell.

2.2.1 Efeitos gravito-magnéticos

Existe um outro tipo de efeitos que esperaríamos numa teoria relativista da gravitação, mas que não estão presentes na gravitação Newtoniana: efeitos do tipo ‘magnético’. Para deduzir a sua existência consideramos uma ‘gadankenexperiment’. Temos dois observadores, a Ana e o Zé, em movimento relativo com velocidade v . Os dois observadores contemplam duas correntes de massa paralelas. Numa posição simétrica entre as duas correntes é colocada uma partícula:

- Do ponto de vista da Ana, as correntes de massa têm a mesma densidade ρ e velocidades iguais mas opostas $-v$ e v - Fig. 2.3 (painel superior).
- Do ponto de vista do Zé a corrente inferior tem velocidade zero e a superior tem velocidade $\simeq -2v$ (para $v \ll c$) - Fig. 2.3 (painel inferior). Por um raciocínio análogo

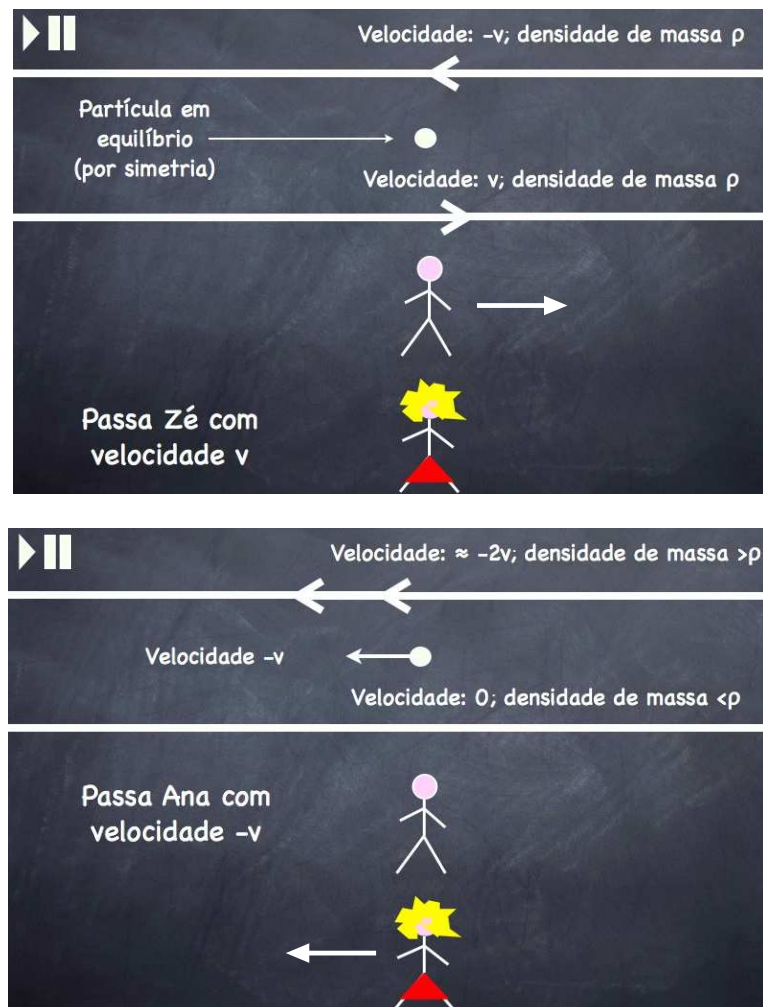


Figura 2.3: O ponto de vista da Ana (painel superior) e o ponto de vista do Zé (painel inferior).

ao feito em (2.2.3), a corrente superior tem uma densidade de massa superior a ρ enquanto que a inferior tem uma densidade de massa inferior a ρ .

Do ponto de vista da Ana, a partícula está em equilíbrio por simetria. Do ponto de vista do Zé, contudo, não há simetria; acresce que como a gravidade Newtoniana é insensível à velocidade, interessando apenas a densidade de massa, a partícula deveria ser atraída para a corrente superior, que tem uma maior densidade de massa. Dado que a força gravítica Newtoniana é semelhante em muitos aspectos à força eléctrica, denominamos esta resultante por *força gravitoeléctrica* - Fig. 2.4. Contudo, sendo a mesma situação física que aquela que é observada pela Ana, a partícula não pode deslocar-se para a corrente superior - dado que a Ana não observa isso. Tem, por isso, de existir outra força que cancela a força gravitoeléctrica, que terá a mesma magnitude e direcção mas sentido oposto - Fig. 2.4. Esta força não existia no primeiro referencial; portanto deverá estar associada à velocidade da partícula. Como apenas a corrente superior tem velocidade não nula, esta experiência sugere que existe uma força gravitomagnética repulsiva entre correntes de massa paralelas; note-se o contraste com o electromagnetismo, onde a força entre correntes paralelas é atractiva. Esta diferença é análoga à diferença de sinal entre a força gravitacional (atractiva) e a força eléctrica (repulsiva) entre cargas com o mesmo sinal.

Estas forças entre correntes de massa não existem na gravitação Newtoniana onde a quantidade de movimento não origina um campo gravitacional adicional.

2.3 O princípio de equivalência aponta o caminho

A secção anterior poderá sugerir que uma teoria relativista da gravitação terá propriedades muito semelhantes às do electromagnetismo - a teoria relativista do campo electromagnético. Há, no entanto, uma diferença fundamental que resulta do *princípio de equivalência*.

Na sua forma Galileana, o princípio de equivalência afirma a universalidade da razão entre a massa gravitacional e inercial m_g/m_i . Este princípio implica a universalidade da

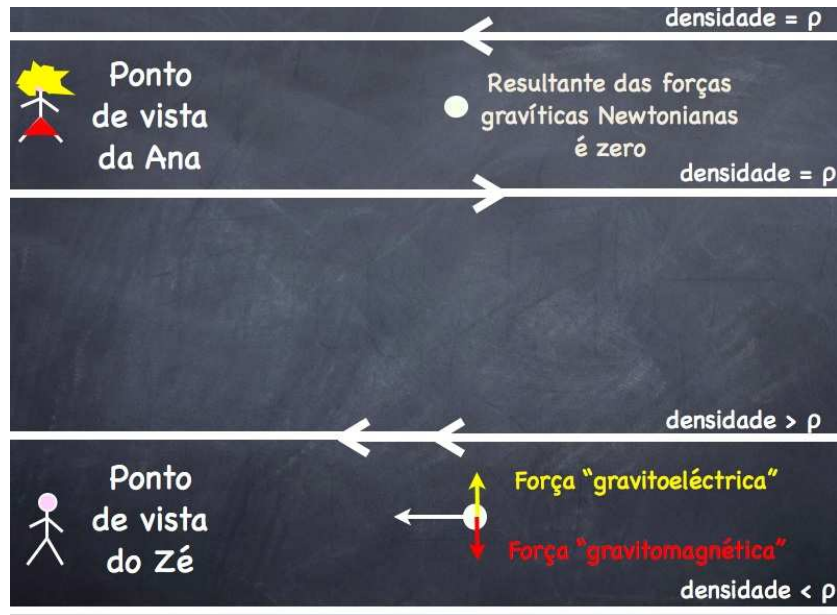


Figura 2.4: Comparação das forças que actuam na partícula do ponto de vista da Ana e do Zé.

aceleração dos corpos num campo gravítico. De facto,

$$\vec{F} = m_i \vec{a}, \quad \vec{F}_G = -G \frac{m_g M}{r^2} \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -\frac{m_g}{m_i} \frac{GM}{r^2} \hat{r}, \quad (2.3.1)$$

e como tal a aceleração num campo gravítico é igual para todos os corpos. É pedagógico contrastar esta situação com o caso eléctrico. Uma partícula com massa (inercial) m_i e carga q , acelera no campo eléctrico de uma outra carga Q do seguinte modo:

$$\vec{F} = m_i \vec{a}, \quad \vec{F}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{q}{m_i} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}; \quad (2.3.2)$$

logo esta aceleração depende da razão q/m que não é universal (por exemplo é nula para um neutrão e não nula para o protão). Logo, num campo gravítico uniforme, podemos-nos livrar totalmente do campo no referencial em queda livre, onde as partículas poderão ter velocidade mas não terão aceleração. Por contraste, num campo eléctrico uniforme, apenas conseguimos eliminar a aceleração de uma classe de partículas com uma dada razão de carga para massa. Dito de outra forma, no referencial em queda livre não existe força gravítica - Fig. 2.5. Esta força pode ser removida ('*gauged away*') por uma mudança de referencial.

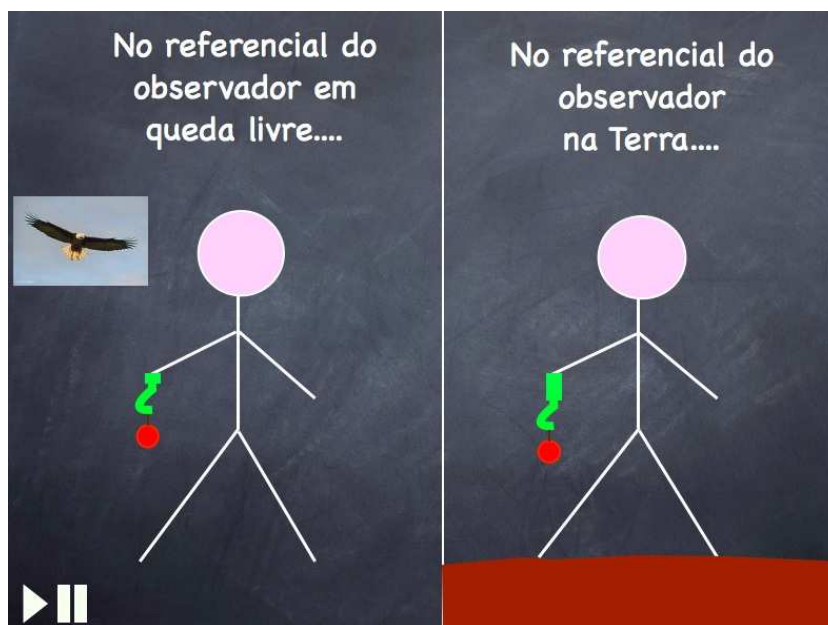


Figura 2.5: Comparação da força gravítica que actua numa massa (medida por um dinamómetro) num referencial em queda livre (painel da esquerda) e num referencial fixo à terra (painel da direita). O primeiro não mede qualquer força enquanto que o segundo mede.

Um campo gravítico realista, contudo, não é uniforme. Nesse caso, no referencial em queda livre, a força gravítica será eliminada mas apenas localmente! Como exemplo consideremos uma queda de grande altitude para o planeta Terra. O observador em queda transporta consigo duas massas que terão trajectórias concorrentes no centro da Terra - Fig. 2.5. Ao longo da queda, as massas irão aproximar-se. Este efeito acontece devido às forças de maré - isto é as diferenças da força gravítica em pontos vizinhos, que serão não nulas se o campo não for homogéneo. Portanto, enquanto a força gravítica pode ser removida no referencial em queda livre, as forças de maré não podem.

Na sua formulação da relatividade, Einstein sempre procurou objectos invariantes, i.e. independentes de observador. Assim, claramente, *a formulação da gravitação relativista deveria ter como objecto central as forças de maré e não a força gravítica, que pode ser removida por uma transformação de coordenadas*. Esta irrelevância da força gravítica é sintetizada no princípio de equivalência, que pode ser reformulado do seguinte modo:

“Para os observadores em queda livre num campo gravítico, as leis da Mecânica são,

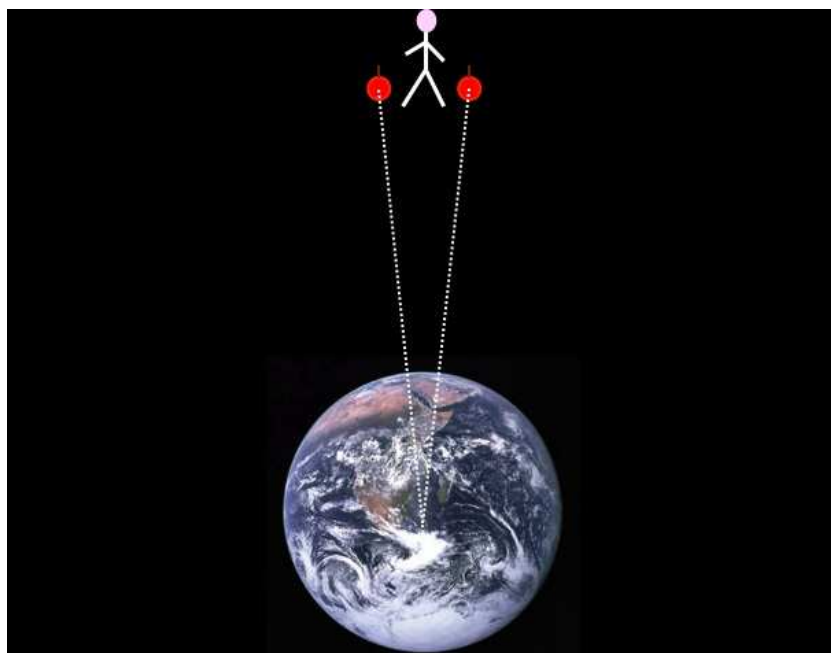


Figura 2.6: Uma queda de grande altitude de modo a perceber a não uniformidade do campo gravítico da Terra.

localmente, as mesmas que na ausência de gravidade.”

Equivalentemente:

“Para os observadores acelerados na ausência de gravidade, as leis da Mecânica são, localmente, as mesmas que num campo gravítico com a mesma aceleração gravítica local.”

E se o campo gravítico for perfeitamente uniforme, a equivalência é global.

Einstein, de facto, postulou um princípio mais alargado, denominado de *princípio de equivalência forte* ou *princípio de equivalência de Einstein*:

“Para os observadores acelerados na ausência de gravidade, não apenas as leis da Mecânica mas todas as leis da física (e em particular do electromagnetismo), são, localmente, as mesmas que num campo gravítico com a mesma aceleração gravítica local.”

Com o princípio de equivalência como guia, e construindo na base da relatividade restrita, Einstein propôs-se a construir uma teoria da gravitação que:

- i) Tenha como objecto central as forças de maré, que terão de ser descritas por objectos matemáticos que não possam ser anulados por uma mudança de referencial. A

força gravítica, por outro lado, será descrita por objectos que podem ser nulos num referencial (em queda livre ou *inercial*) e porventura não nulos em outros referenciais.

- ii) Seja coerente com os princípios da relatividade restrita e, em particular, tenha uma propagação causal (ondas gravitacionais) e efeitos do tipo ‘magnéticos’.
- iii) Generalize a equação de Poisson (2.2.2) para uma forma manifestamente independente de observador, mas que se reduza a esta num limite apropriado, de modo a recuperar os resultados da gravitação Newtoniana (com correcções).
- vi) Explique o avanço anómalo do periélio de Mercúrio.

Einstein encontrou o formalismo matemático adequado para conseguir o seu objectivo na linguagem da geometria diferencial e do cálculo tensorial. Os principais conceitos de que necessitaremos serão introduzidos no próximo capítulo.

 Noções fundamentais (e pragmáticas) de geometria diferencial

Como vimos no capítulo anterior, os objectos independente de observador - no sentido que não podem ser anulados por uma escolha particular de observador - para a descrição da gravitação, são as forças de maré. Estes objectos encontram a linguagem matemática apropriada no *cálculo tensorial*.

3.1 Vectores, co-vectores (1-formas) e tensores

Considere uma curva γ numa variedade \mathcal{M} , n -dimensional (i.e. um espaço localmente difeomórfico a \mathbb{R}^n). A curva é parametrizada por λ e é descrita num sistema arbitrário de coordenadas, pelas relações $x^\alpha(\lambda)$ - Fig. 3.1.

Queremos calcular a razão a que varia uma função escalar $f(x^\alpha)$ ao longo desta curva:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = f_{,\alpha} u^\alpha . \quad (3.1.1)$$

Com este procedimento introduzimos dois tipos de objectos na variedade:

$$u^\alpha \equiv \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \quad \text{é um vector em todos os pontos tangentes a } \gamma , \quad (3.1.2)$$

$$f_{,\alpha} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \quad \text{é um co-vector, o gradiente de } f. \quad (3.1.3)$$

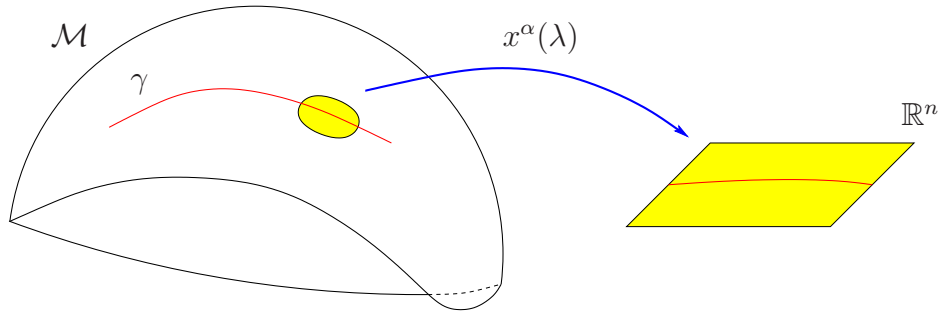


Figura 3.1: Uma curva γ , com parâmetro λ , numa variedade \mathcal{M} . Um sistema coordenado $x^\alpha(\lambda)$ é um mapa de uma parte de \mathcal{M} para uma parte de \mathbb{R}^n .

Numa transformação arbitrária do sistema de coordenadas

$$x^\alpha \longrightarrow x^{\alpha'} , \quad (3.1.4)$$

estes objectos transformam-se da seguinte maneira:

$$f_{,\alpha'} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} f_{,\alpha} , \quad (3.1.5)$$

$$u^{\alpha'} = \frac{dx^{\alpha'}}{d\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} u^\alpha . \quad (3.1.6)$$

Estas equações mostram que $df/d\lambda$ é invariante, isto é:

$$f_{,\alpha'} u^{\alpha'} = f_{,\alpha} u^\alpha . \quad (3.1.7)$$

Qualquer objecto A^α que se transforme como u^α , numa transformação de coordenadas, i.e.

$$A^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha , \quad (3.1.8)$$

será denominado de um vector. Analogamente, qualquer objecto p_α que se transforme com $f_{,\alpha}$ numa transformação de coordenadas, i.e.

$$p_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} p_\alpha , \quad (3.1.9)$$

será denominado por co-vector ou vector dual ou 1-forma. O facto de vectores e co-vectores se transformarem inversamente sob a mesma transformação de coordenadas garante que a contracção $A^\alpha p_\alpha$ é invariante; denomina-se por isso um escalar.

Generalizando estas definições, um tensor do tipo $\left(\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right)$ é um objecto $T^{\alpha\dots\beta}{}_{\gamma\dots\delta}$ que se transforma como

$$T^{\overbrace{\alpha'\dots\beta'}^{n \text{ índices contra-variantes}}}{}_{\underbrace{\gamma'\dots\delta'}_{m \text{ índices co-variantes}}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \dots \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \dots \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\delta'}} T^{\alpha\dots\beta}{}_{\gamma\dots\delta}, \quad (3.1.10)$$

numa transformação de coordenadas. Note-se que a ordem dos índices é importante. Em geral

$$T^{\beta\dots\alpha}{}_{\gamma\dots\delta} \neq T^{\alpha\dots\beta}{}_{\gamma\dots\delta}. \quad (3.1.11)$$

Note-se ainda que, por definição, tensores do tipo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{ são vectores,} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{ são co-vectores,} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{ são escalares.} \end{aligned}$$

Um tensor especial é o tensor métrico, ou métrica, $g_{\alpha\beta}$, (do tipo $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$ e simétrico na troca dos 2 índices), que é usado para definir o produto interno entre 2 vectores. A métrica é também a quantidade que representa os potenciais gravitacionais em Relatividade Geral.

A métrica e a sua inversa ($g^{\alpha\beta}$, também simétrico) definem mapas naturais entre o espaço de vectores e co-vectores:

$$\begin{aligned} \text{Vector } A^{\alpha} & \longrightarrow \text{co-vector } A_{\alpha} = g_{\alpha\beta} A^{\beta} \\ \text{Co-vector } p_{\alpha} & \longrightarrow \text{vector } p^{\alpha} = g^{\alpha\beta} p_{\beta} \end{aligned}$$

Este mapa corresponde a um procedimento de descer ou subir índices. Note-se que a métrica inversa é definida pelas relações:

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (3.1.12)$$

Exercício 3.1: Transformação da métrica de coordenadas Cartesianas para polares. O elemento de linha em \mathbb{R}^2 , escrito em coordenadas Cartesianas é

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad \{x^i\} = \{x, y\}. \quad (3.1.13)$$

Ou seja

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.14)$$

Observe que este elemento de linha é apenas uma expressão infinitesimal do teorema de Pictágoras. Usando a transformação de coordenadas:

$$\{x^i\} \equiv \{x, y\} \longrightarrow \{x^{i'}\} \equiv \{\rho, \phi\} \quad \text{com} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \phi, \\ y = \rho \sin \phi, \end{cases} \quad (3.1.15)$$

obtenha o elemento de linha em coordenadas polares:

$$ds^2 = g_{i'j'} dx^{i'} dx^{j'}, \quad \{x^{i'}\} = \{\rho, \phi\}. \quad (3.1.16)$$

Resolução: Pela regra de transformação tensorial

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}, \quad (3.1.17)$$

ou seja

$$g_{\rho\rho} = \frac{\partial x^i}{\partial \rho} \frac{\partial x^j}{\partial \rho} g_{ij} = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1, \quad (3.1.18)$$

$$g_{\rho\phi} = \frac{\partial x^i}{\partial \rho} \frac{\partial x^j}{\partial \phi} g_{ij} = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right) = -\rho \cos \phi \sin \phi + \rho \cos \phi \sin \phi = 0, \quad (3.1.19)$$

$$g_{\phi\phi} = \frac{\partial x^i}{\partial \phi} \frac{\partial x^j}{\partial \phi} g_{ij} = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 = \rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi = \rho^2. \quad (3.1.20)$$

Logo

$$ds^2 = g_{i'j'} dx^{i'} dx^{j'} = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2. \quad (3.1.21)$$

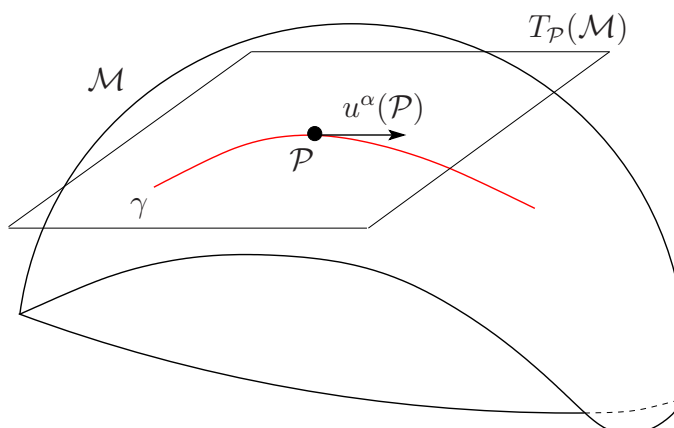


Figura 3.2: O vector tangente à curva γ no ponto \mathcal{P} , “vive” no espaço tangente a \mathcal{M} no ponto \mathcal{P} , denotado $T_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})$.

Os tensores são objectos matemáticos que não estão definidos na variedade. Para ilustrar este factor reconsideremos o vector u^α tangente à curva γ - Fig. 3.2. Esta figura torna claro que o vector u^α pertence ao plano tangente à variedade no ponto \mathcal{P} e não à variedade propriamente dita. Este plano tangente, denotado $T_{\mathcal{P}}(\mathcal{M})$, constitui o espaço vectorial a que pertence o vector u^α . Em particular, este espaço vectorial tem uma base, e essa base, em geral, muda de ponto para ponto, mesmo se a variedade for plana. A única excepção é o caso em que a base vectorial escolhida é a Cartesiana, que tem a propriedade de ser invariante de ponto para ponto - Fig. 3.3.

Analogamente, tensores em \mathcal{P} podem ser considerados como pertencendo a um produto tensorial de cópias do plano tangente (ou, no caso de co-vectores, do plano *co-tangente*). Decorre desta observação que tensores em \mathcal{P} (do mesmo tipo) podem ser adicionados ou subtraídos e o resultado é ainda um tensor. Contudo, um tensor em \mathcal{P} e outro tensor (do mesmo tipo) em outro ponto \mathcal{Q} não podem ser combinados de um modo tensorial porque pertencem a planos tangentes (e como tal espaços vectoriais) diferentes. Dito de outro modo, as suas componentes estão expressas em bases diferentes. Assim, as operações

$$A^\alpha(\mathcal{Q}) - A^\alpha(\mathcal{P}), \quad A^\alpha(\mathcal{P})B^\beta(\mathcal{Q}),$$

não são operações tensoriais (isto é não são válidas em qualquer base). Para ilustrar este facto considerarmos a primeira destas operações, $A^\alpha(\mathcal{Q}) - A^\alpha(\mathcal{P})$, e o exemplo da

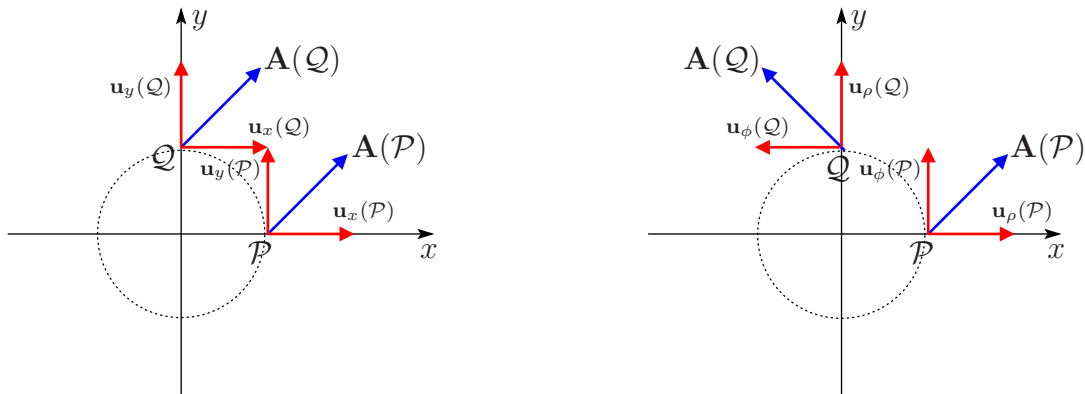


Figura 3.3: Um referencial Cartesiano (x, y) em \mathbb{R}^2 (espaço Euclidiano a duas dimensões) e dois pontos \mathcal{P} e \mathcal{Q} , com coordenadas $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente, na base Cartesiana. Painel da esquerda: a base vectorial Cartesiana $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$ e o vector $\mathbf{A} = (1, 1)$ - nesta base - em \mathcal{P} e \mathcal{Q} . Painel da direita: a base vectorial polar $(\mathbf{u}_\rho, \mathbf{u}_\phi)$ e o vector $\mathbf{A} = (1, 1)$ - nesta base - em \mathcal{P} e \mathcal{Q} .

Fig. 3.3. Usando a base Cartesiana, é manifesto, tanto por inspeção da figura como subtraindo as componentes, que $A^\alpha(\mathcal{Q}) - A^\alpha(\mathcal{P})$ origina o vector nulo. Contudo, usando a base polar, temos de ter cuidado: se subtrairmos (ingenuamente) $A^\alpha(\mathcal{Q}) - A^\alpha(\mathcal{P})$ usando as componentes na base polar obtemos o vector nulo. Mas esta operação está errada, na medida em que as componentes de $A^\alpha(\mathcal{Q})$ e $A^\alpha(\mathcal{P})$ se referem a duas bases vectoriais diferentes. Este facto torna-se claro se reescrevermos estes dois vectores (do painel da direita da Fig. 3.3) na base Cartesiana, na qual têm componentes: $A^\alpha(\mathcal{Q}) = (-1, 1)$ e $A^\alpha(\mathcal{P}) = (1, 1)$ e como tal $A^\alpha(\mathcal{Q}) - A^\alpha(\mathcal{P}) = (-2, 0)$, na base Cartesiana. Portanto, apenas na base Cartesiana podemos somar/subtrair as componentes de vectores em diferentes pontos (dado que a base é igual em todos os pontos).

Estas observações implicam que a diferenciação de tensores não é uma operação trivial, dado que os tensores podem estar expressos em qualquer sistema de coordenadas. Para definir a derivada de um tensor uma regra tem de ser estabelecida para transportar tensores de um ponto para outro de uma variedade.

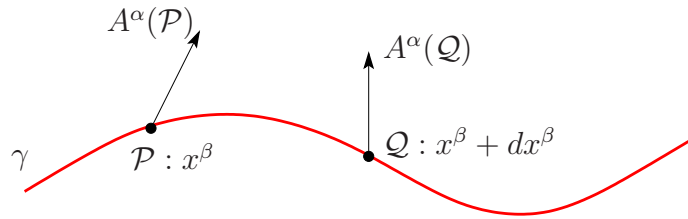


Figura 3.4: Uma curva γ em torno da qual se encontra definido um campo vectorial A^α , explicitamente ilustrado nos pontos \mathcal{P} e \mathcal{Q} da curva.

3.2 Derivada Covariante

Uma regra para esse propósito é o transporte paralelo. Para o definirmos consideremos uma curva γ , o seu vector tangente u^α e um campo vectorial A^α , definido na vizinhança de γ - Fig. 3.4. Consideremos o ponto \mathcal{P} da curva com coordenadas x^β e o ponto \mathcal{Q} com coordenadas $x^\beta + dx^\beta$. Como afirmado anteriormente a operação

$$\begin{aligned} dA^\alpha &\equiv A^\alpha(\mathcal{Q}) - A^\alpha(\mathcal{P}) \\ &= A^\alpha(x^\beta + dx^\beta) - A^\alpha(x^\beta) \\ &= A^\alpha_{,\beta} dx^\beta \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

não é tensorial. Podemos verificar isto facilmente numa transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} A^{\alpha'}_{,\beta'} &= \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \left(\overbrace{\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha}^{A^\alpha \text{ é tensor}} \right) = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha_{,\beta}}_{\text{Lei de transformação tensorial}} + \underbrace{\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha}_{\text{termo adicional}}, \end{aligned}$$

que não é uma transformação tensorial. Para obtermos um objecto tensorial, escrevemos o operador derivada na forma

$$DA^\alpha = \underbrace{A^\alpha(\mathcal{P})}_{\text{vector obtido por transporte de } A^\alpha \text{ de } \mathcal{Q} \text{ para } \mathcal{P}} - A^\alpha(\mathcal{P}).$$

Logo, podemos escrever

$$\underbrace{DA^\alpha}_{A_T^\alpha(\mathcal{P}) - A^\alpha(\mathcal{P})} = \underbrace{dA^\alpha}_{A^\alpha(\mathcal{Q}) - A^\alpha(\mathcal{P})} + \delta A^\alpha \quad \Rightarrow \quad \delta A^\alpha = A_T^\alpha(\mathcal{P}) - A^\alpha(\mathcal{Q}),$$

onde introduzimos δA^α , que também não é uma operação tensorial. Este objecto contém a regra do transporte paralelo que, para prosseguir, necessitamos de especificar: exigimos que δA^α seja linear tanto no campo A^μ como no deslocamento dx^α ; logo terá a forma

$$\delta A^\alpha = \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu dx^\beta, \quad (3.2.2)$$

onde $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$ são as componentes de um campo (não tensorial) denominado conexão linear. A priori podemos especificar este campo livremente. Temos agora

$$DA^\alpha = (A^\alpha_{,\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu) dx^\beta \quad (3.2.3)$$

ou, dividindo por $d\lambda$, o incremento ao longo da curva,

$$\frac{DA^\alpha}{d\lambda} = A^\alpha_{;\beta} u^\beta \quad (3.2.4)$$

o que define a derivada covariante do vector A^α , cujas componentes são:

$$\boxed{A^\alpha_{;\beta} \equiv A^\alpha_{,\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu} \quad (3.2.5)$$

Outras notações comuns são

$$A^\alpha_{;\beta} \equiv \nabla_\beta A^\alpha \equiv D_\beta A^\alpha \quad ; \quad \frac{DA^\alpha}{d\lambda} = \nabla_u A^\alpha .$$

O primeiro termo na derivada covariante manifesta a variação das componentes do campo vectorial numa dada base, enquanto que o segundo termo manifesta a variação devida à variação dos vectores da base no transporte paralelo.¹

O facto que $A^\alpha_{;\beta}$ é um tensor permite-nos deduzir a lei de transformação da conexão. Começamos por escrever

$$\Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu = A^\alpha_{;\beta} - A^\alpha_{,\beta} . \quad (3.2.6)$$

¹A intuição sugerida pela Fig. 3.2 é de facto enganadora. Mesmo que a variedade seja plana, se não usarmos uma base Cartesiana, o espaço vectorial varia de ponto para ponto (porque a base varia) o que implica a existência de uma conexão não nula.

No novo sistema de coordenadas a equação (que é tensorial) toma a mesma forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu'\beta'}^{\alpha'} A^{\mu'} &= \overbrace{\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A_{;\beta}^\alpha}^{A^{\alpha'}_{;\beta'}} - \underbrace{A^{\alpha'}_{;\beta'}}_{(A^{\alpha'}_{;\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu)} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A_{;\beta}^\alpha + \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha \right) \\ \Gamma_{\mu'\beta'}^{\alpha'} A^{\mu'} &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha . \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Como $A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} A^\mu$ e A^μ é um campo vectorial arbitrário obtemos

$$\Gamma_{\mu'\beta'}^{\alpha'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \Gamma_{\mu\beta}^\alpha - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} . \quad (3.2.8)$$

Contraindo com $\partial x^\mu / \partial x^{\gamma'}$ obtemos (alterando o índice mudo $\mu \rightarrow \gamma$ nos termos do lado direito)

$$\boxed{\Gamma_{\gamma'\beta'}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha - \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}}} . \quad (3.2.9)$$

Esta é a lei da transformação da conexão. O segundo termo revela a natureza não tensorial da conexão. Há duas observações pertinentes:

- O segundo termo nesta lei (o termo não tensorial) não depende da conexão. Logo, a diferença entre duas conexões transforma-se como um tensor. Este resultado será usado mais tarde.
- A parte anti-simétrica da conexão, chamada *torção*, transforma-se como tensor.

A derivada covariante pode ser estendida a outros tipos de tensor exigindo que o operador D obedeça à regra do produto no cálculo diferencial - regra de Leibnitz. Primeiro notamos que para uma função escalar, f ,

$$\partial_\beta f \equiv f_{;\beta} = f_{;\beta} \equiv D_\beta f . \quad (3.2.10)$$

Seguidamente, notamos que podemos determinar a derivada covariante de um co-vector (por exemplo) pelo requerimento de que:

$$\underbrace{d(A^\alpha p_\alpha)}_{\text{LE}} \equiv D(A^\alpha p_\alpha) = \underbrace{DA^\alpha p_\alpha + A^\alpha Dp_\alpha}_{\text{LD}}$$

é escalar

$$\text{LE: } \partial_\beta (A^\alpha p_\alpha) dx^\beta = (\cancel{A^\alpha_{;\beta} p_\alpha} + A^\alpha p_{\alpha,\beta}) dx^\beta$$

$$\text{LD: } (\cancel{A^\alpha_{;\beta}} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu) p_\alpha dx^\beta + (A^\alpha D_\beta p_\alpha) dx^\beta$$

$$\text{LE} = \text{LD} \Rightarrow A^\alpha p_{\alpha,\beta} dx^\beta - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha A^\mu p_\alpha dx^\beta = A^\alpha D_\beta p_\alpha dx^\beta$$

$$\text{ou } \frac{Dp_\alpha}{d\lambda} = p_{\alpha;\beta} u^\beta$$

$$\text{onde } \boxed{p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu p_\mu} . \quad (3.2.11)$$

Este procedimento generaliza-se para tensores de tipo arbitrário. Por exemplo, a derivada covariante de um tensor de tipo $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ é dada por

$$\boxed{T_{\beta;\gamma}^\alpha = T_{\beta,\gamma}^\alpha + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha T_{\beta}^\mu - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu T_{\mu}^\alpha} . \quad (3.2.12)$$

Estabelecemos assim a seguinte regra: *Há uma conexão para cada índice tensorial; vem com um sinal + (-) se o índice for contravariante (covariante).*

Até este momento a conexão foi deixada arbitrária. Uma escolha especial é requerer que a conexão seja simétrica

$$\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \quad (3.2.13)$$

denominada ‘compatível com a métrica’

(ou conexão métrica ou conexão de Levi-Civita)

$$g_{\alpha\beta;\gamma} = 0 . \quad (3.2.14)$$

Esta é a escolha feita para a conexão em Relatividade Geral; esta escolha implementa a ausência de torção e o princípio de equivalência de Einstein.

Pondo

$$g_{\alpha\beta;\gamma} + g_{\alpha\gamma;\beta} - g_{\gamma\beta;\alpha} = 0 ,$$

A equação (3.2.14) escreve-se explicitamente

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta;\gamma} = 0 &\Leftrightarrow g_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} g_{\mu\beta} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} g_{\alpha\mu} = 0 \\ g_{\alpha\gamma;\beta} = 0 &\Leftrightarrow g_{\alpha\gamma,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} g_{\mu\gamma} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\mu} g_{\alpha\mu} = 0 \\ g_{\gamma\beta;\alpha} = 0 &\Leftrightarrow g_{\gamma\beta,\alpha} - \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu} g_{\mu\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} g_{\gamma\mu} = 0 . \end{aligned}$$

usando que a conexão é simétrica:

$$g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\gamma\beta,\alpha} - 2 \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} g_{\alpha\mu} = 0 ,$$

contraindo com $g^{\alpha\mu}$, ($\gamma \rightarrow \mu$) ,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} (g_{\alpha\beta,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\beta} - g_{\gamma\beta,\alpha}) . \quad (3.2.15)$$

A conexão simétrica e métrica é totalmente determinada pela métrica. Neste contexto os $\Gamma_{\beta\gamma}^{\mu}$ denominam-se símbolos de Christoffel. Terminamos esta secção introduzindo terminologia. Um campo tensorial $T^{\alpha\dots}_{\beta\dots}$ é transportado paralelamente ao longo de uma curva γ se a sua derivada covariante ao longo da curva é nula

$$\frac{D T^{\alpha\dots}_{\beta\dots}}{d\lambda} = u^{\mu} T^{\alpha\dots}_{\beta\dots;\mu} = 0 . \quad (3.2.16)$$

Exercício 3.2: Um vector constante mas não covariantemente constante.

Considere, em coordenadas polares, um campo vectorial com componentes

$$\mathbf{A} = (A^{\rho}, A^{\phi}) = (0, 1) . \quad (3.2.17)$$

Este campo vectorial é constante? Calcule a sua derivada covariante.

Resolução: Do Exercício 3.1 sabemos que a métrica em coordenadas polares é

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 . \quad (3.2.18)$$

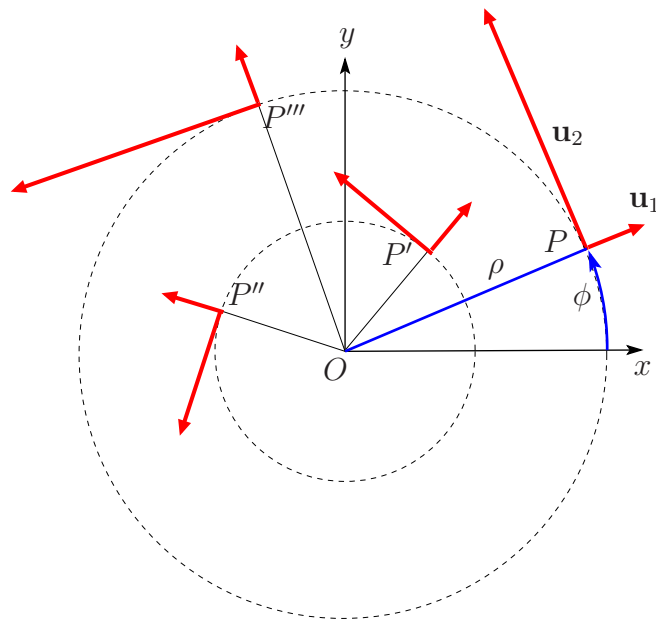


Figura 3.5: Coordenadas polares ρ, ϕ de um ponto P . É representado o referencial Cartesiano cujo eixo xx define a linha com $\phi = 0$. A base vectorial induzida pelo sistema coordenado é representada em P, P', P'' e P''' . O versor \mathbf{u}_1 é sempre radial e unitário; o versor \mathbf{u}_2 num ponto é sempre tangente à circunferência de raio ρ que passa nesse ponto, com o sentido em que ϕ cresce e com magnitude ρ . Claramente, o campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{u}_2$ não é constante.

A base vectorial induzida por estas coordenadas é:

$$\mathbf{u}_1 = (u_1^\rho, u_1^\phi) = (1, 0) , \quad \mathbf{u}_2 = (u_2^\rho, u_2^\phi) = (0, 1) = \mathbf{A} . \quad (3.2.19)$$

Em particular note-se que esta base é ortogonal mas não está normalizada:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = u_1^\mu u_1^\nu g_{\mu\nu} = 1 , \quad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = u_1^\mu u_2^\nu g_{\mu\nu} = 0 , \quad \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = u_2^\mu u_2^\nu g_{\mu\nu} = r^2 . \quad (3.2.20)$$

Estes vectores estão representados na Fig. 3.5. A conexão em coordenadas polares tem as seguintes componentes não nulas:

$$\Gamma_{\phi\phi}^\rho = -\rho , \quad \Gamma_{\phi\rho}^\phi = \frac{1}{\rho} . \quad (3.2.21)$$

Assim, as componentes não nulas da derivada covariante dos vectores da base são:

$$D_\phi u_1^\phi = \frac{1}{\rho} , \quad D_\rho u_2^\phi = \frac{1}{\rho} , \quad D_\phi u_2^\rho = -\rho . \quad (3.2.22)$$

A interpretação destas fórmulas é clara. $D_\mu u_i^\nu$ expressa a componente ν (nesta base) da variação de \mathbf{u}_i na direcção x^μ (faça uns desenhos para se convencer!).

3.3 Geodésicas

Uma curva é denominada geodésica se extremiza a distância entre 2 pontos fixos. Seja a curva γ descrita pelas relações $x^\alpha(\lambda)$ onde λ é um parâmetro arbitrário, e sejam \mathcal{P} e \mathcal{Q} dois pontos nesta curva.

A distância entre \mathcal{P} e \mathcal{Q} ao longo desta curva é dada por

$$l = \int_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}} \sqrt{\pm g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} d\lambda , \quad (3.3.1)$$

onde $\dot{x}^\alpha \equiv dx^\alpha/d\lambda$. Dentro da raiz quadrada, escolhemos o sinal positivo (negativo) se a curva for espacial (temporal); assumimos, de momento, que a curva γ não é nula. Note-se que a distância l é manifestamente invariante por reparametrizações da curva

$$\lambda \longrightarrow \lambda'(\lambda) . \quad (3.3.2)$$

A curva para a qual a distância l é extremizada é determinada usando o “Lagrangiano”

$$L(x^\mu, \dot{x}^\mu) = \sqrt{\pm g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (3.3.3)$$

nas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0. \quad (3.3.4)$$

Vejam os que condição específica se obtém para os $x^\alpha(\lambda)$ que descrevem uma geodésica:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \pm \frac{2g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{2L}, \quad \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \pm \frac{g_{\alpha\beta,\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}{2L}, \quad (3.3.5)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \pm \frac{g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu}{L} \pm \frac{g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu}{L} \mp \underbrace{\frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{L^2} \frac{dL}{d\lambda}}_{\text{derivada total}}. \quad (3.3.6)$$

Logo as equações de Euler Lagrange ficam

$$\pm \frac{1}{L} \left(g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + \underbrace{g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu}_{g_{\mu\beta,\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\mu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \right) = \pm \frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{L^2} \frac{dL}{d\lambda}. \quad (3.3.7)$$

$$g_{\mu\beta,\alpha} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{1}{2} (g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta$$

Como a geodésica nunca é nula $L \neq 0$ em todos os pontos. Logo multiplicamos por $\pm L$; contraímos ainda com $g^{\mu\sigma}$

$$\ddot{x}^\sigma + \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \dot{x}^\sigma \underbrace{\frac{d \ln L}{d\lambda}}_{\equiv k(\lambda)}. \quad (3.3.8)$$

Obtemos assim a equação das geodésicas

$$\boxed{\ddot{x}^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \dot{x}^\sigma k(\lambda)}. \quad (\text{onde } \lambda \text{ é parâmetro arbitrário}) \quad (3.3.9)$$

Como $\dot{x}^\sigma = u^\sigma$ é o vector tangente à curva e $d/d\lambda u^\sigma = u^\alpha \partial_\alpha u^\sigma$ esta equação pode ser reescrita como

$$u^\alpha (\partial_\alpha u^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma u^\beta) = u^\sigma k(\lambda) \Leftrightarrow \boxed{u^\alpha D_\alpha u^\sigma = u^\sigma k(\lambda)}. \quad (3.3.10)$$

Uma escolha particularmente útil de parâmetro é (a particularização do parâmetro só deve ser feita depois da extremização):

$$\begin{aligned}\tau &= \text{tempo próprio se a geodésica for temporal ,} \\ s &= \text{distância própria se a geodésica for espacial .}\end{aligned}$$

Como $d\tau^2 = -g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ para as geodésicas temporais;

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \text{ para as geodésicas espaciais;}$$

temos $L = 1$ em qualquer dos casos e logo

$$k = \frac{d \ln L}{d\lambda} = 0 . \quad (3.3.11)$$

Neste caso a equação das geodésicas simplifica para

$$\boxed{\ddot{x}^\sigma + \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0} , \quad (\text{onde } \lambda \text{ é parâmetro afim}) \quad (3.3.12)$$

ou $u^\alpha D_\alpha u^\sigma = 0$; isto é, numa geodésica o vector tangente é transportado paralelamente (o que por vezes é tomado como a definição de geodésica).

As equações (3.3.12) são invariantes por reparametrização da forma

$$\lambda \longrightarrow \lambda' = a\lambda + b , \quad a, b \text{ constantes .} \quad (3.3.13)$$

Parâmetros relacionados por esta transformação com s e τ são chamados parâmetros afim (transformação afim).

É útil reparar que a equação (3.3.12) das geodésicas com parâmetro afim pode ser recuperada usando o Lagrangiano

$$L' = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta , \quad (3.3.14)$$

nas equações de Euler-Lagrange, o que origina um método prático para calcular as equações das geodésicas.

Por continuidade, a forma de geral $u^\alpha D_\alpha u^\sigma = k(\lambda)u^\sigma$ também tem de ser válida para as geodésicas nulas. Note-se que neste caso o parâmetro λ é necessariamente não-afim. Os parâmetros tempo e espaço próprio, ao longo de uma geodésica nula obedecem a

$$d\tau = 0 = ds , \quad (3.3.15)$$

o que implica que o limite nulo dos parâmetros afim temporal/espacial é singular (por exemplo para definir velocidade $dx^\alpha/d\lambda$). No entanto a equação das geodésicas nulas pode ainda ser transformada na forma (3.3.12) e nesse sentido encontra-se um parâmetro afim (que não é o limite dos parâmetros afim temporal/espacial). Vejamos como. Consideramos

$$t^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad \text{que obedece a} \quad \frac{Dt^\alpha}{d\lambda} = kt^\alpha. \quad (3.3.16)$$

Fazendo uma transformação $\lambda^* = \lambda^*(\lambda)$, queremos obter um

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda^*} \quad \text{que obedeça a} \quad \frac{Du^\alpha}{d\lambda^*} = 0. \quad (3.3.17)$$

Trabalhamos a última equação:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{Du^\alpha}{d\lambda^*} = u^\beta D_\beta u^\alpha = \frac{dx^\beta}{d\lambda^*} D_\beta \frac{dx^\alpha}{d\lambda^*} \\ &= \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\lambda^*} D_\beta \left(\underbrace{\frac{dx^\alpha}{d\lambda}}_{t^\alpha} \frac{d\lambda}{d\lambda^*} \right) \\ \text{Leibnitz} &= t^\beta \left(\frac{d\lambda}{d\lambda^*} \right)^2 D_\beta t^\alpha + t^\beta t^\alpha \frac{d\lambda}{d\lambda^*} \partial_\beta \frac{d\lambda}{d\lambda^*} \\ &\Leftrightarrow \frac{Dt^\alpha}{d\lambda} + t^\alpha \frac{d}{d\lambda} \ln \frac{d\lambda}{d\lambda^*} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{Dt^\alpha}{d\lambda} = -t^\alpha k(\lambda) \quad \text{onde} \quad k(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda} \ln \frac{d\lambda}{d\lambda^*}. \end{aligned}$$

Logo
$$\boxed{\frac{d\lambda}{d\lambda^*} = e^{-\int^\lambda k(\lambda') d\lambda'}}, \quad (3.3.18)$$

e o parâmetro “afim” é obtido como $d\lambda^*/d\lambda = e^{\int^\lambda k(\lambda') d\lambda'}$.

Resumindo: enquanto que a versão nula de $u^\alpha D_\alpha u^\sigma = k(\lambda)u^\sigma$ é obtida por um limite da versão temporal/espacial, a versão nula de $u^\alpha D_\alpha u^\sigma = 0$ não é um limite da versão temporal/espacial, dado que a parametrização é descontínua.

Terminamos esta secção notando que ao longo de uma geodésica com parametrização afim (tipo tempo, espacial ou nula) a quantidade escalar

$$\varepsilon = u^\alpha u_\alpha,$$

é constante. Demonstração:

$$\frac{d}{d\lambda}\varepsilon = (u^\alpha u_\alpha)_{;\beta} u^\beta = u^\alpha_{;\beta} u_\alpha u^\beta + u^\alpha u_{\alpha;\beta} u^\beta = 0 .$$

Se escolhermos tempo (espaço) próprio para λ , então $\varepsilon = -1$ ($\varepsilon = +1$). Para as geodésicas nulas, $\varepsilon = 0$.

3.4 Derivada de Lie

Na secção 3.2 definimos a derivada covariante através da introdução de uma regra para transportar um tensor de um ponto \mathcal{Q} para um ponto vizinho \mathcal{P} , no qual a derivada iria ser calculada. Esta regra envolveu a introdução de uma nova estrutura na variedade: a conexão linear. Vamos agora definir um outro tipo de derivada, a derivada de Lie, que não necessita da introdução de qualquer estrutura adicional.

Tal como na secção 3.2 consideremos uma curva γ , o seu vector tangente $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ e um campo vectorial A^α , definido na vizinhança de γ - Fig. 3.4. Consideremos ainda os pontos \mathcal{P} (coordenadas x^α) e \mathcal{Q} (coordenadas $x^\alpha + dx^\alpha$)

A equação $x'^\alpha \equiv x^\alpha + dx^\alpha = x^\alpha + u^\alpha d\lambda$ pode ser interpretada como uma transformação infinitesimal de coordenadas, de $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$.² Numa tal transformação de coordenadas o vector A^α transforma-se

$$\begin{aligned} A'^\alpha(x') &= \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta(x) \\ &= (\delta^\alpha_\beta + u^\alpha_{;\beta} d\lambda) A^\beta(x) \\ &= A^\alpha(x) + u^\alpha_{;\beta} A^\beta(x) d\lambda \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Por outras palavras

$$A'^\alpha(\mathcal{Q}) = A^\alpha(\mathcal{P}) + u^\alpha_{;\beta} A^\beta(\mathcal{P}) d\lambda . \tag{3.4.2}$$

Por outro lado, $A^\alpha(\mathcal{Q})$, o valor do campo vectorial original no ponto \mathcal{Q} pode ser expresso

²Note que neste caso é conveniente usar a notação x'^α e não $x^{\alpha'}$.

como

$$\begin{aligned}
 A^\alpha(\mathcal{Q}) &= A^\alpha(x + dx) \\
 &= A^\alpha(x) + A^\alpha_{;\beta}(x)dx^\beta \\
 &= A^\alpha(\mathcal{P}) + u^\beta A^\alpha_{;\beta}(\mathcal{P})d\lambda .
 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Em geral, $A'^\alpha(\mathcal{Q})$ e $A^\alpha(\mathcal{Q})$ não serão iguais. A sua diferença define a derivada de Lie de um vector A^α ao longo da curva γ

$$\mathcal{L}_u A^\alpha(\mathcal{P}) \equiv \frac{A^\alpha(\mathcal{Q}) - A'^\alpha(\mathcal{Q})}{d\lambda} . \tag{3.4.4}$$

Logo

$$\boxed{\mathcal{L}_u A^\alpha = u^\beta A^\alpha_{;\beta} - u^\alpha_{;\beta} A^\beta} . \tag{3.4.5}$$

Esta equação não é manifestamente covariante. Contudo $\mathcal{L}_u A^\alpha$ é um tensor. A natureza tensorial torna-se evidente se reescrevermos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_u A^\alpha &= u^\beta A^\alpha_{;\beta} - u^\alpha_{;\beta} A^\beta \\
 &= u^\beta (A^\alpha_{;\beta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} A^\sigma) - (u^\alpha_{;\beta} + \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} u^\sigma) A^\beta \\
 &= u^\beta A^\alpha_{;\beta} - u^\alpha_{;\beta} A^\beta .
 \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

O facto de que a derivada de Lie se pode definir sem recorrermos a uma conexão linear mostra que esta é uma operação mais "primitiva" que a derivada covariante.

A definição de derivada de Lie estende-se a todo o tipo de tensores. Para escalares

$$\boxed{\mathcal{L}_u f = \frac{df}{d\lambda} = f_{;\alpha} u^\alpha} = f_{;\alpha} u^\alpha . \tag{3.4.7}$$

Para co-vectores, repetindo os mesmos passos obtemos

$$\boxed{\mathcal{L}_u p_\alpha = p_{\alpha;\beta} u^\beta + \underbrace{u^\beta_{;\alpha} p_\beta}_{} } \tag{3.4.8}$$

tinha de ser + para as conexões

cancelarem ao covariantizar

$$= p_{\alpha;\beta} u^\beta + u^\beta_{;\alpha} p_\beta .$$

Para um tensor do tipo $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u T^\alpha_\beta &= T^\alpha_{\beta,\mu} u^\mu - u^\alpha_{,\mu} T^\mu_\beta + u^\mu_{,\beta} T^\alpha_\mu \\ &= T^\alpha_{\beta;\mu} u^\mu - u^\alpha_{;\mu} T^\mu_\beta + u^\mu_{;\beta} T^\alpha_\mu . \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

As restantes generalizações são óbvias. A derivada de Lie como qualquer derivada, obedece à regra de Leibnitz do cálculo diferencial:

$$\boxed{\mathcal{L}_u(A^\alpha p_\beta) = (\mathcal{L}_u A^\alpha) p_\beta + A^\alpha (\mathcal{L}_u p_\beta)} . \quad (3.4.10)$$

Um campo tensorial $T^{\alpha\dots}_{\beta\dots}$ é Lie transportado ao longo de uma curva γ se a sua derivada de Lie ao longo dessa curva é zero:

$$\mathcal{L}_u T^{\alpha\dots}_{\beta\dots} = 0 , \quad (3.4.11)$$

onde u^α é o vector tangente a γ . Suponha que se escolhem coordenadas de modo a que x^1, x^2 e x^3 são todos constantes em γ , enquanto que $x^0 = \lambda$ varia γ . Nesse sistema de coordenadas³

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \stackrel{*}{=} \delta_0^\alpha . \quad (3.4.12)$$

Logo $u^\alpha_{,\beta} \stackrel{*}{=} 0$ e como tal

$$\mathcal{L}_u T^{\alpha\dots}_{\beta\dots} = T^{\alpha\dots}_{\beta\dots,\mu} u^\mu \stackrel{*}{=} \frac{\partial}{\partial x^0} T^{\alpha\dots}_{\beta\dots} . \quad (3.4.13)$$

Assim, se um tensor for Lie transportado ao longo de γ , as componentes do tensor são todas independentes de x^0 no sistema coordenado usado. Este resultado é sintetizado no seguinte teorema:

Se $\mathcal{L}_u T^{\alpha\dots}_{\beta\dots} = 0$, isto é, se um tensor é Lie transportado ao longo de uma curva γ com vector tangente u^α , então um sistema coordenado pode ser construído tal que

$$u^\alpha \stackrel{*}{=} \delta_0^\alpha \quad e \quad T^{\alpha\dots}_{\beta\dots,0} \stackrel{*}{=} 0 . \quad (3.4.14)$$

³A notação $\stackrel{*}{=}$ significa igual no sistema de coordenadas especificado.

Reciprocamente, se num dado sistema de coordenadas as componentes de um tensor não dependem de uma coordenada particular x^0 então a derivada de Lie do tensor na direcção u^α ($u^\alpha \stackrel{*}{=} \delta_0^\alpha$) é zero.

Vemos deste modo que a derivada de Lie é a maneira natural de expressar covariantemente a invariância de um tensor numa certa direcção.

3.5 Vectores de Killing

Se, num dado sistema de coordenadas, as componentes da métrica não dependerem de x^0 , então, pelo teorema anterior,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \xi^\alpha \stackrel{*}{=} \delta_0^\alpha . \quad (3.5.1)$$

O vector ξ^α é denominado um *vector de Killing* e define uma isometria. A condição para ξ^α ser Killing é, explicitamente

$$0 = \mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} . \quad (3.5.2)$$

Portanto o tensor $\binom{0}{2} \xi_{\alpha;\beta}$ é antisimétrico se ξ^α é Killing.

Os vectores de Killing podem ser usados para encontrar constantes do movimento associadas ao movimentos geodésico. Suponhamos que u^α é tangente a uma geodésica com parâmetro afim λ . Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(u^\alpha \xi_\alpha) &= (u^\alpha \xi_\alpha)_{;\beta} u^\beta \\ &= \underbrace{u^\alpha_{;\beta} u^\beta \xi_\alpha}_{\text{zero porque}} + \underbrace{\xi_{\alpha;\beta} u^\alpha u^\beta}_{\text{zero porque}} = 0 . \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

é geodésica é Killing

Logo $u^\alpha \xi_\alpha$ é constante ao longo da geodésica.

Consideremos um exemplo: o elemento de linha de um espaço-tempo estático e com simetria esférica:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 , \quad (3.5.4)$$

onde $d\Omega^2$ denota o elemento de linha da 2-esfera:

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 . \quad (3.5.5)$$

Como a métrica não depende de t ou ϕ os vectores

$$\xi_{(t)}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} = \delta_t^\alpha \quad ; \quad \xi_{(\phi)}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \phi} = \delta_\phi^\alpha . \quad (3.5.6)$$

são vectores de Killing. As quantidades

$$\tilde{E} = -u_\alpha \xi_{(t)}^\alpha \quad ; \quad \tilde{L} = u_\alpha \xi_{(\phi)}^\alpha \quad (3.5.7)$$

são constantes ao longo de uma geodésica com vector tangente u^α . Se a geodésica for temporal e u^α for a 4-velocidade de uma partícula que se move ao longo da geodésica, então \tilde{E} e \tilde{L} são interpretados, respectivamente, como energia e momento angular por unidade de massa. Note-se que o facto de existir simetria esférica implica a existência de outros 2 vectores de Killing adicionais:

$$\xi_{(1)}^\alpha \partial_\alpha = \sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi , \quad (3.5.8)$$

$$\xi_{(2)}^\alpha \partial_\alpha = -\cos \phi \partial_\theta + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi . \quad (3.5.9)$$

Exercício 3.3: Mostre que os vectores anteriores são de facto vectores de Killing na 2-esfera, S^2 com elemento de linha (3.5.5).

Resolução: Considerando $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$:

$$(\mathcal{L}_{\xi_{(1)}} g)_{\alpha\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_{\alpha\beta,\mu} \xi_{(1)}^\mu + g_{\mu\beta} \xi_{(1),\alpha}^\mu + g_{\alpha\mu} \xi_{(1),\beta}^\mu = 0 ; \quad (3.5.10)$$

Esta equação tem 3 componentes correspondendo a $\alpha\beta = \begin{cases} \theta\theta \\ \phi\phi \\ \theta\phi \end{cases}$.

Estas três componentes são, respectivamente:

- $\cancel{g_{\theta\theta} \xi_{(1)}^\mu} + \cancel{g_{\mu\theta} \xi_{(1),\theta}^\mu} + \cancel{g_{\theta\mu} \xi_{(1),\theta}^\mu} = 0$;
- $g_{\phi\phi,\theta} \sin \phi + 2g_{\phi\phi} \cot \theta (-\sin \phi) = 0 \Leftrightarrow$
 $2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi + 2 \cos \theta \sin \theta (-\sin \phi) = 0$;
- $g_{\theta\theta} \xi_{(1),\phi}^\theta + g_{\phi\phi} \xi_{(1),\theta}^\phi = 0 \Leftrightarrow$
 $\cos \phi + \sin^2 \theta \left(-\frac{1}{\sin^2 \phi}\right) \cos \phi = 0$,

como queríamos demonstrar. O cálculo para $\xi_{(2)}^\mu$ é análogo.

Se adicionarmos a estes dois vectores de Killing na 2-esfera aquele já observado anteriormente devido à métrica não depender de ϕ ,

$$\xi_{(\phi)}^\alpha \partial_\alpha = \xi_{(3)}^\alpha \partial_\alpha = \partial_\phi \quad (3.5.11)$$

Podemos agora calcular a *álgebra de Lie* dos vectores de Killing, através do cálculo dos respectivos comutadores:

$$\begin{aligned} [\xi_{(1)} , \xi_{(2)}] &= [\sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi , -\cos \phi \partial_\theta + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi] \\ &= -\frac{\sin^2 \phi}{\sin^2 \theta} \partial_\phi + \cancel{\cot \theta \cos \phi \sin \phi \partial_\theta} + \cot^2 \theta \cos^2 \phi \partial_\phi \\ &\quad -\frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \theta} \partial_\phi - \cancel{\cot \theta \sin \phi \cos \phi \partial_\theta} + \cot^2 \theta \sin^2 \phi \partial_\phi \\ &= -\partial_\phi = -\xi_{(3)} ; \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

$$\begin{aligned} [\xi_{(2)} , \xi_{(3)}] &= [-\cos \phi \partial_\theta + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi , \partial_\phi] \\ &= -\sin \phi \partial_\theta - \cot \theta \cos \phi \partial_\phi = -\xi_{(1)} ; \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

$$\begin{aligned} [\xi_{(3)} , \xi_{(1)}] &= [\partial_\phi , \sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi] \\ &= \cos \phi \partial_\theta - \cot \theta \sin \phi \partial_\phi = -\xi_{(2)} . \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

Logo $[\xi_{(1)}, \xi_{(2)}] = -\varepsilon_{ijk} \xi_{(k)}$. Esta álgebra de Lie corresponde ao grupo de Lie denotado $SO(3)$, que é o grupo das rotações em 3 dimensões espaciais. O grupo obtido pela álgebra dos vectores de Killing define o *grupo de isometria* de uma variedade.

3.6 Planura local

Para um dado ponto \mathcal{P} numa variedade é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas $x^{\alpha'}$ tal que

$$g_{\alpha'\beta'}(\mathcal{P}) = \eta_{\alpha'\beta'} , \quad \Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}(\mathcal{P}) = 0 , \quad (3.6.1)$$

onde $\eta_{\alpha'\beta'} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski. Este sistema de coordenadas denominam-se o *referencial localmente de Lorentz em \mathcal{P}* (no caso Lorentziano) ou sistema de *coordenadas normais* (no caso Euclideano). Mas notemos desde já que não é possível, anular simultaneamente as derivadas da conexão em \mathcal{P} , $\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}(\mathcal{P})$, quando o espaço tempo for curvo.

Este resultado, denominado *teorema da planura local*, tem a seguinte interpretação física: os observadores em queda livre não observam força gravítica no seu referencial ($\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'}(\mathcal{P}) = 0$) e observam uma física localmente igual àquela que observam no espaço de Minkowski ($g_{\alpha'\beta'}(\mathcal{P}) = \eta_{\alpha'\beta'}$), como referido pelo princípio de equivalência de Einstein. As forças de maré, contudo, que são dadas pelas derivadas da conexão, não podem ser anuladas; como já foi referido várias vezes, elas são a verdadeira assinatura da gravidade.

Demonstramos agora o teorema em dois passos:

- 1) Seja x^α um sistema coordenado arbitrário e assumimos, sem perda de generalidade, que \mathcal{P} está na origem quer do sistema x^α quer do sistema $x^{\alpha'}$. Assim sendo, as coordenadas em ambos os sistemas de um ponto próximo de \mathcal{P} estão relacionadas por

$$x^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta} + O(x^2) , \quad x^{\alpha} = A^{\alpha}_{\beta'} x^{\beta'} + O(x'^2) , \quad (3.6.2)$$

onde $A^{\alpha'}_{\beta}$ e $A^{\alpha}_{\beta'}$ são matrizes constantes que são também a inversa uma da outra

$$A^{\alpha'}_{\mu} A^{\mu}_{\beta'} = \delta^{\alpha'}_{\beta'} . \quad A^{\alpha}_{\mu'} A^{\mu'}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} . \quad (3.6.3)$$

Sob esta transformação a métrica fica

$$g_{\alpha'\beta'}(\mathcal{P}) = \underbrace{\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}}_{A^\alpha_{\alpha'}} \underbrace{\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}}_{A^\beta_{\beta'}} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}). \quad (3.6.4)$$

Vamos requerer que o lado esquerdo seja $\eta_{\alpha'\beta'}$. Isto dá-nos 10 equações para as 16 componentes incógnitas da matriz $A^\alpha_{\alpha'}$. Logo o sistema está subdeterminado; uma solução pode sempre ser encontrada que deixa ainda 6 componentes por determinar. Esta liberdade corresponde à liberdade de fazer transformações de Lorentz (3 rotações e 3 *boosts*) o que não altera a forma da métrica de Minkowski.

O resultado estabelecido, que a métrica pode ser transformada, num ponto, na métrica de Minkowski, é de facto um caso particular de um bem conhecido resultado em álgebra matricial conhecido como a *lei da inércia de Sylvester*, que passamos a rever. Seja g uma matriz quadrada, real e simétrica de ordem n . Qualquer matriz não-singular A , de ordem n , transforma g numa outra matriz simétrica g' , equivalente e da mesma ordem n : $g \rightarrow g' = AgA^T$. Observe-se que esta é exactamente a equação (3.6.4). A lei da inércia estabelece que uma matriz simétrica g pode sempre, por este processo, ser transformada numa matriz diagonal equivalente com entradas 0, 1 e -1 na diagonal, e que o número de entradas diagonais de cada um destes tipos é um invariante de g (não depende de A). O número de zeros, denotado n_0 , é igual à dimensão do *kernel* de g . O número de +1 (-1) denotado $n_+(n_-)$ é denominado o índice positivo (negativo) de inércia. A *assinatura* de g é definida como sendo

$$\text{assinatura}(g) \equiv n_+ - n_- , \quad (3.6.5)$$

e é um invariante de g . Em relatividade geral em quatro dimensões trabalha-se com $\text{assinatura}(g) = 2$.

- 2) Suponhamos que uma escolha particular foi feita para $A^\alpha_{\alpha'}$. $A^{\alpha'}_{\alpha}$ é obtida invertendo $A^\alpha_{\alpha'}$ e a transformação de coordenadas para as coordenadas normais fica definida em

1ª ordem. Consideremos esta transformação em 2ª ordem

$$x^{\alpha'} = A^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta} + \frac{1}{2} B^{\alpha'}_{\beta\gamma} x^{\beta} x^{\gamma} + O(x^3), \quad (3.6.6)$$

onde os coeficientes (constantes) $B^{\alpha'}_{\beta\gamma}$ são simétricos nos índices inferiores. Recordemos que numa transformação de coordenadas a conexão linear se transforma como

$$\underbrace{\Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'}}_{\text{em P} \rightarrow} = \underbrace{\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}}_{A^{\alpha'}_{\alpha}} \underbrace{\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}}_{A^{\beta}_{\beta'}} \underbrace{\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}}_{A^{\gamma}_{\gamma'}} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - \underbrace{\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^{\gamma} \partial x^{\beta}}}_{B^{\alpha'}_{\gamma\beta}} \underbrace{\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}}}_{A^{\beta}_{\beta'}} \underbrace{\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}}}_{A^{\gamma}_{\gamma'}}. \quad (3.6.7)$$

Como queremos $\Gamma^{\alpha'}_{\gamma'\beta'}(P) = 0$ temos

$$A^{\alpha'}_{\alpha} A^{\beta}_{\beta'} A^{\gamma}_{\gamma'} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}(P) = B^{\alpha'}_{\gamma\beta} A^{\beta}_{\beta'} A^{\gamma}_{\gamma'}, \quad (3.6.8)$$

ou, contraindo ambos os lados da equação com $A^{\gamma'}_{\mu} A^{\beta'}_{\nu}$,

$$B^{\alpha'}_{\mu\nu} = A^{\alpha'}_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}(P). \quad (3.6.9)$$

Estas equações determinam $B^{\alpha'}_{\mu\nu}$ unicamente, e a transformação de coordenadas para coordenadas normais fica conhecida até à segunda ordem. Independentemente dos termos de ordem superior ela garante que

$$g_{\alpha'\beta'}(P) = \eta_{\alpha'\beta'} \quad \Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'}(P) = 0, \quad (3.6.10)$$

o que estabelece o teorema da planura local.

3.7 O determinante métrico

A quantidade $\sqrt{|g|}$ onde $g = \det g_{\alpha\beta}$ aparece frequentemente em geometria diferencial. Nesta secção vamos estabelecer três importantes propriedades sobre esta quantidade.

Propriedade 1 - A quantidade

$$\sqrt{\frac{g}{g'}} \quad \text{onde} \quad g' = \det g_{\alpha'\beta'}, \quad (3.7.1)$$

é o determinante Jacobiano (ou simplesmente Jacobiano) da transformação de coordenadas

$$x^\alpha \rightarrow x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\alpha) . \quad (3.7.2)$$

Demonstração da Propriedade 1 - Recordemos, do cálculo vectorial elementar, que a matriz Jacobiana para a transformação de coordenadas (3.7.2) é $\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}$ e o Jacobiano é $J = \det\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\right)$. Considerando a transformação da métrica:

$$g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} g_{\alpha\beta} \quad (3.7.3)$$

e tirando o determinante:

$$\det g_{\alpha'\beta'} = \det \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \det \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \det g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow g' = J^{-2}g \Leftrightarrow \sqrt{\frac{g}{g'}} = J ,$$

o que prova a afirmação.

Propriedade 2 - A quantidade

$$\sqrt{|g|} d^4x , \quad (3.7.4)$$

com $|g| = -g$ se a métrica for Lorentziana, é um elemento de volume invariante à volta do ponto \mathcal{P} (arbitrário).

Demonstração da Propriedade 2 - Recordamos, do cálculo vectorial elementar, que numa transformação de coordenadas da form (3.7.2) o elemento de volume ganha um factor do inverso do Jacobiano

$$d^4x = J^{-1}d^4x' . \quad (3.7.5)$$

Se inicialmente tivermos um referencial localmente de Lorentz em \mathcal{P} (coordenadas normais), x^α (tal que $|g| = 1$), e transformamos para um sistema de coordenadas arbitrário $x^{\alpha'}$, O elemento de volume 4-dimensional à volta de \mathcal{P} é

$$d^4x = J^{-1}d^4x' = \sqrt{\frac{g'}{g}}d^4x' = \sqrt{|g'|}d^4x' . \quad (3.7.6)$$

Logo, o elemento de volume nas coordenadas arbitrárias é (3.7.4). Este resultado generaliza-se para uma variedade de dimensão arbitrária n e com qualquer assinatura da métrica:

$$\sqrt{|g|} d^n x \quad \text{é um elemento de volume invariante.} \quad (3.7.7)$$

Propriedade 3 - A derivada de $\sqrt{|g|}$ verifica a relação:

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sqrt{-g}_{,\alpha} . \quad (3.7.8)$$

Demonstração da Propriedade 3 - Começamos por observar que

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2} \underbrace{g^{\mu\nu}}_{\text{simétrico } \mu \leftrightarrow \nu} (g_{\nu\mu,\alpha} + \underbrace{g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\alpha,\nu}}_{\text{antisimétrico } \mu \leftrightarrow \nu}) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha} .$$

Seguidamente consideremos, para uma matriz arbitrária M (não singular), a variação de $\ln |\det M|$ induzida pela variação dos elementos de M :

$$\begin{aligned} \delta \ln |\det M| &\equiv \ln |\det(M + \delta M)| - \ln |\det M| \\ &= \ln \left(\frac{\det(M + \delta M)}{\det M} \right) \\ &= \ln(\det M^{-1} \times \det(M + \delta M)) \\ &= \ln \det(M^{-1}(M + \delta M)) \\ &= \ln \det(1 + M^{-1}\delta M) . \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

Usamos agora a identidade

$$\det(1 + \varepsilon) = 1 + \text{Tr } \varepsilon + O(\varepsilon^2) , \quad (3.7.10)$$

válida para uma matriz ε cujos elementos são pequenos. Logo

$$\delta \ln |\det M| \simeq \ln(1 + \text{Tr } M^{-1}\delta M) \simeq \text{Tr } M^{-1}\delta M . \quad (3.7.11)$$

Seguidamente aplicamos este resultado a $M = g_{\alpha\beta}$:

$$\delta \ln |g| = \text{Tr } g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\mu} = g^{\alpha\beta} \delta g_{\beta\alpha} , \quad (3.7.12)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ln |g| = g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} \Leftrightarrow \frac{\partial_{\mu} |g|}{|g|} = g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} . \quad (3.7.13)$$

No caso Lorentziano, em que $|g| = -g$, obtemos então

$$\partial_{\mu} \sqrt{-g} = \frac{\partial_{\mu}(-g)}{2\sqrt{-g}} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}(-g)g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \sqrt{-g} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\mu} = \Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} , \quad (3.7.14)$$

o que demonstra a propriedade 3.

O resultado (3.7.8) permite-nos estabelecer fórmulas da divergência convenientes para vectores e tensores anti-simétricos:

- Para qualquer campo vectorial

$$\boxed{A^\alpha{}_{;\alpha} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^\alpha)_{,\alpha}}; \quad (3.7.15)$$

de facto

$$\begin{aligned} A^\alpha{}_{;\alpha} &= A^\alpha{}_{,\alpha} + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha A^\beta = A^\alpha{}_{,\alpha} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\sqrt{-g}A^\beta = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^\alpha{}_{,\alpha} + \partial_\alpha\sqrt{-g}A^\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^\alpha)_{,\alpha}. \end{aligned}$$

- Para qualquer campo tensorial antisimétrico:

$$\boxed{B^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}B^{\alpha\beta})_{,\beta}}; \quad (3.7.16)$$

de facto

$$\begin{aligned} B^{\alpha\beta}{}_{;\beta} &= B^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \underbrace{B^{\mu\beta}}_{\text{antisimétrico}} \underbrace{\Gamma_{\mu\beta}^\alpha}_{\text{simétrico}} + B^{\alpha\mu} \underbrace{\Gamma_{\mu\beta}^\beta}_{\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}B^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \partial_\mu\sqrt{-g}B^{\alpha\mu}). \end{aligned}$$

Nota 1: Uma fórmula análoga aplica-se a campos tensoriais anti-simétricos de rank mais elevado, $B^{\alpha_1\dots\alpha_n} = B^{[\alpha_1\dots\alpha_n]}$:

$$\boxed{B^{\alpha_1\dots\alpha_n}{}_{;\alpha_n} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}B^{\alpha_1\dots\alpha_n})_{,\alpha_n}}. \quad (3.7.17)$$

Observe-se que estes campos tensoriais só existem se

$$\dim \text{espaço-tempo} \geq n.$$

Nota 2: Para um campo tensorial simétrico $A^{\alpha\beta} = A^{(\alpha\beta)}$:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}A^{\alpha\beta})_{,\beta} \neq A^{\alpha\beta}{}_{;\beta}. \quad (3.7.18)$$

As fórmulas (3.7.15), (3.7.16) e (3.7.17) são maneiras muito práticas de calcular divergências.

3.8 O tensor de Levi-Civita

O símbolo de permutações $[\alpha \beta \gamma \delta]$, definido por

$$[\alpha \beta \gamma \delta] = \begin{cases} +1 & \text{se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ é uma permutação par de } 0123 \\ -1 & \text{se } \alpha\beta\gamma\delta \text{ é uma permutação ímpar de } 0123 \\ 0 & \text{se 2 índices são iguais} \end{cases}$$

é uma quantidade não tensorial muito útil. Por exemplo, pode ser usada para definir o determinante de uma matriz

$$\begin{aligned} \det[M_{\mu\nu}] &= [\alpha \beta \gamma \delta] M_{0\alpha} M_{1\beta} M_{2\gamma} M_{3\delta} \\ &= [\alpha \beta \gamma \delta] M_{\alpha 0} M_{\beta 1} M_{\gamma 2} M_{\delta 3} . \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

Ambas as igualdades podem ser estabelecidas por cálculo directo. Note-se que as duas igualdades anteriores estabelecem a bem conhecida igualdade que

$$\det[M_{\beta\alpha}] = \det[M_{\alpha\beta}] . \quad (3.8.2)$$

(i.e. determinante invariante na troca de linhas por colunas)

Mostramos agora que a combinação

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{-g} [\alpha \beta \gamma \delta]} , \quad (3.8.3)$$

é um tensor: o *tensor de Levi-Civita*.

Para demonstrar este facto, começamos por considerar a quantidade:

$$[\alpha \beta \gamma \delta] \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}} ; \quad (3.8.4)$$

ela é completamente anti-simétrica nos índices com linha. Logo tem de ser proporcional a $[\alpha' \beta' \gamma' \delta']$ (dado que só tem 1 grau de liberdade em quatro dimensões):

$$[\alpha \beta \gamma \delta] \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}} = \lambda [\alpha' \beta' \gamma' \delta'] , \quad (3.8.5)$$

onde λ é o factor de proporcionalidade. Para determinarmos λ consideremos o caso particular

$$\alpha' \beta' \gamma' \delta' = 0 \ 1 \ 2 \ 3 \quad \Rightarrow \quad [\alpha' \beta' \gamma' \delta'] = 1 ;$$

para esta caso (3.8.5) fica

$$\lambda = \underbrace{[\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta] \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{0'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{2'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{3'}}}_{\det \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \right)} . \quad (3.8.6)$$

$$\det \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \right) = \underbrace{J^{-1}}_{\text{Jacobiano da}}$$

transformação

Logo

$$\sqrt{-g} [\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta] \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\gamma'}} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\delta'}} = \sqrt{-g'} [\alpha' \ \beta' \ \gamma' \ \delta'] . \quad (3.8.7)$$

Isto estabelece que, de facto, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ se transforma como um tensor do tipo $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix} \right)$.

Notemos que esta demonstração poderia ter começado com a relação

$$[\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta] \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^\delta} = \lambda' [\alpha' \ \beta' \ \gamma' \ \delta'] . \quad (3.8.8)$$

o que teria levado, analogamente, à conclusão que $\lambda' = \sqrt{\frac{g}{g'}}$.

Logo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} [\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta] \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^{\delta'}}{\partial x^\delta} = \frac{1}{\sqrt{-g'}} [\alpha' \ \beta' \ \gamma' \ \delta'] . \quad (3.8.9)$$

Definindo

$$\boxed{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} [\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta]} , \quad (3.8.10)$$

verificamos que $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ se transforma como um tensor $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$.

Este também é o tensor de Levi-Civita, obtido de $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ subindo os 4 índices; isto é

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} g_{\gamma\lambda} g_{\delta\rho} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} . \quad (3.8.11)$$

Escolhendo $\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta = 0 \ 1 \ 2 \ 3$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{0123} &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} [\mu \ \nu \ \lambda \ \rho] g_{0\mu} g_{1\nu} g_{2\lambda} g_{3\rho} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} g = \sqrt{-g} , \end{aligned} \quad (3.8.12)$$

que é compatível com (3.8.3) e explica o sinal ‘menos’ na definição (3.8.10).

O tensor de Levi-Civita é de grande utilidade em geometria diferencial.

3.9 Curvatura

O tensor de Riemann (ou tensor de curvatura) pode ser definido pela relação

$$[D_\beta, D_\alpha]A^\mu \equiv -R^\mu_{\nu\alpha\beta} A^\nu, \quad (3.9.1)$$

$$\underbrace{A^\mu_{;\alpha\beta} - A^\mu_{;\beta\alpha}}$$

para qualquer campo vectorial A^μ . Calculemos explicitamente o lado esquerdo desta equação:

$$\begin{aligned} A^\mu_{;\alpha\beta} &= \partial_\beta(A^\mu_{;\alpha}) + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} A^\sigma_{;\alpha} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} A^\mu_{;\sigma} \\ &= \partial_\beta \partial_\alpha A^\mu + \partial_\beta(\Gamma^\mu_{\sigma\alpha} A^\sigma) + \Gamma^\mu_{\sigma\beta}(\partial_\alpha A^\sigma + \Gamma^\sigma_{\tau\alpha} A^\tau) - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(\partial_\tau A^\mu + \Gamma^\mu_{\tau\sigma} A^\tau) \\ &= \underbrace{\partial_\beta \partial_\alpha A^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha,\beta} A^\sigma}_{\text{simétrico } \alpha \leftrightarrow \beta} + \underbrace{\Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \partial_\beta A^\sigma + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \partial_\alpha A^\sigma}_{\text{simétrico } \alpha \leftrightarrow \beta} + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\tau\alpha} A^\tau - \underbrace{\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}(\partial_\tau A^\mu + \Gamma^\mu_{\tau\sigma} A^\tau)}_{\text{simétrico } \alpha \leftrightarrow \beta}; \end{aligned}$$

os termos simétricos na troca de α com β desaparecem na subtração $A^\mu_{;\alpha\beta} - A^\mu_{;\beta\alpha}$. Logo

$$\begin{aligned} A^\mu_{;\alpha\beta} - A^\mu_{;\beta\alpha} &= \Gamma^\mu_{\sigma\alpha,\beta} A^\sigma + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\tau\alpha} A^\tau - \Gamma^\mu_{\sigma\beta,\alpha} A^\sigma - \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\tau\beta} A^\tau \\ &= (\Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} - \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} + \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} - \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\beta}) A^\nu. \end{aligned}$$

Logo, pela definição (3.9.2), obtemos uma expressão para o tensor de Riemann em termos da conexão (note-se que esta expressão assumiu a conexão de Levi-Civita):

$$\boxed{R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\nu\alpha}}. \quad (3.9.2)$$

Por definição o tensor de Riemann é anti-simétrico nos últimos 2 índices. As suas restantes propriedades de simetria dependem da escolha da conexão. Para o caso da conexão de Levi-Civita (3.9.2), estas propriedades podem ser obtidas através da forma do tensor de Riemann num referencial localmente de Lorentz. Nesse referencial, no ponto \mathcal{P}

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \eta_{\mu\nu}, \quad \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha}(\mathcal{P}) = 0, \quad \text{mas } \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(\mathcal{P}) \neq 0;$$

$$\begin{aligned} R^\mu_{\nu\alpha\beta} &\stackrel{*}{=} \frac{1}{2}(g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta} + g_{\sigma\beta,\nu} - g_{\nu\beta,\sigma}))_{,\alpha} - \alpha \leftrightarrow \beta \\ &= \frac{1}{2}(g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta} + g_{\sigma\beta,\nu} - g_{\nu\beta,\sigma}))_{,\alpha} - \alpha \leftrightarrow \beta; \end{aligned}$$

logo, eliminando os termos simétricos na troca de α com β obtemos a expressão

$$R_{\sigma\nu\alpha\beta} \stackrel{*}{=} \frac{1}{2}(g_{\sigma\beta,\nu\alpha} - g_{\nu\beta,\sigma\alpha} - g_{\sigma\alpha,\nu\beta} + g_{\nu\alpha,\sigma\beta}) . \quad (3.9.3)$$

Esta forma implica as seguintes relações tensoriais (e portanto válidas em qualquer sistema de coordenado)

anti-simétrico na troca

dos elementos do 2º par

$$R_{\sigma\nu\alpha\beta} \underbrace{=} -R_{\nu\sigma\alpha\beta} \underbrace{=} -R_{\sigma\nu\beta\alpha} \underbrace{=} R_{\alpha\beta\sigma\nu} . \quad (3.9.4)$$

anti-simétrico na troca

simétrico na troca do

dos elementos do 1º par

1º par com o 2º par

Uma outra simetria menos óbvia é:

$$\boxed{R_{\sigma\nu\alpha\beta} + R_{\sigma\beta\nu\alpha} + R_{\sigma\alpha\beta\nu} = 0} , \quad (3.9.5)$$

que são as Primeiras identidades de Bianchi. Para as demonstrar basta expandir a última equação em termos de (3.9.3):

$$\begin{aligned} & g_{\sigma\beta,\nu\alpha} - g_{\nu\beta,\sigma\alpha} - g_{\sigma\alpha,\nu\beta} + g_{\nu\alpha,\sigma\beta} \\ & + g_{\sigma\alpha,\beta\nu} - g_{\beta\alpha,\sigma\nu} - g_{\sigma\nu,\beta\alpha} + g_{\beta\nu,\sigma\alpha} \\ & + g_{\sigma\nu,\alpha\beta} - g_{\alpha\nu,\sigma\beta} - g_{\sigma\beta,\alpha\nu} + g_{\alpha\beta,\sigma\nu} = 0 . \end{aligned}$$

Existem também as segundas identidades de Bianchi:

$$\boxed{R_{\sigma\mu\nu\alpha;\beta} + R_{\sigma\mu\beta\nu;\alpha} + R_{\sigma\mu\alpha\beta;\nu} = 0} , \quad (3.9.6)$$

cuja demonstração é (no referencial localmente de Lorentz) exactamente análoga à anterior.

O tensor de Riemann, definido como

$$[D_\beta, D_\alpha]A^\mu = R^\mu_{\nu\beta\alpha}A^\nu , \quad (3.9.7)$$

obedece ainda a

$$p_{\mu;\alpha\beta} - p_{\mu;\beta\alpha} = R^\nu_{\mu\alpha\beta} p_\nu \Leftrightarrow [D_\beta, D_\alpha] p_\mu = -R^\nu_{\mu\beta\alpha} p_\nu , \quad (3.9.8)$$

para um co-vector arbitrário e também a

$$T^{\mu}_{\nu;\alpha\beta} - T^{\mu}_{\nu;\beta\alpha} = -R^{\mu}_{\lambda\alpha\beta} T^{\lambda}_{\nu} + R^{\lambda}_{\nu\alpha\beta} T^{\mu}_{\lambda}, \quad (3.9.9)$$

para um tensor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ arbitrário. A generalização para tensores de Rank mais elevado deverá ser óbvia. O número de termos com o tensor de Riemann do lado direito é igual ao número de índices tensoriais.

Contrações não nulas do tensor de Riemann produzem o tensor de Ricci,

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\mu\beta}, \quad (3.9.10)$$

que é um tensor simétrico na troca $\alpha \leftrightarrow \beta$: $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$ e pode ser visto como o traço do tensor de Riemann. O traço do tensor de Ricci, por sua vez, é o escalar de Ricci

$$R = R^{\mu}_{\mu}, \quad R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha}. \quad (3.9.11)$$

O tensor de Einstein é definido por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (3.9.12)$$

que também é um tensor simétrico. Este tensor tem divergência nula

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (3.9.13)$$

por virtude das segundas identidades de Bianchi. De facto, contraindo com (3.9.6) com $g^{\sigma\nu}$

$$R_{\mu\alpha;\beta} - R_{\mu\beta;\alpha} + R^{\nu}_{\mu\alpha\beta;\nu} = 0. \quad (3.9.14)$$

Contraindo agora com $g^{\mu\beta}$ obtemos

$$\begin{aligned} R^{\beta}_{\alpha;\beta} - R_{;\alpha} + R^{\nu}_{\alpha;\nu} = 0 &\Leftrightarrow 2R^{\beta}_{\alpha;\beta} - R_{;\alpha} = 0 \Leftrightarrow R^{\beta}_{\alpha;\beta} - \frac{1}{2}(R \delta^{\beta}_{\alpha})_{;\beta} = 0 \\ \Leftrightarrow (R^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{2}R \delta^{\beta}_{\alpha})_{;\beta} = 0 &\Leftrightarrow G^{\beta}_{\alpha;\beta} = 0. \end{aligned} \quad (3.9.15)$$

As equações de Einstein (equações do campo gravítico da Relatividade Geral) são:

$$\boxed{G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\alpha\beta}}, \quad (3.9.16)$$

(usualmente tomam-se unidades em que $G = 1 = c$) e relacionam a curvatura do espaço tempo (representada pelo tensor de Einstein) com a distribuição de matéria/energia-momento (representada pelo tensor de energia-momento). O facto do tensor de Einstein obedecer a $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ implica que $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, que é a expressão tensorial da conservação de momento e energia. A equação $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ implica também que, das 10 equações de Einstein (3.9.16) apenas 6 são independentes. Como a métrica é um tensor 4×4 simétrico, tem 10 componentes independentes que as equações de Einstein determinam a menos de 4 funções arbitrárias que manifestam a nossa completa liberdade em escolher o sistema coordenado.

Notemos ainda que, contraindo (3.9.16) com $g_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta} G^{\alpha\beta} = R - \underbrace{\frac{1}{2} \times 4 \times R}_{-R} = \underbrace{8\pi T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}}_{\equiv T \text{ traço do tensor de momento-energia}}$$

$$\Rightarrow G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (8\pi T) . \quad (3.9.17)$$

Logo as equações de Einstein (3.9.16) podem ser reescritas

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T) . \quad (3.9.18)$$

No vácuo ($T_{\alpha\beta} = 0$), portanto, as equações de Einstein reduzem-se à afirmação geométrica

$$R_{\alpha\beta} = 0 . \quad (3.9.19)$$

Variedades que obedecem a esta restrição dizem-se *Ricci-planas*.

3.10 Desvio geodésico

O significado geométrico do tensor de Riemann pode ser ilustrado examinando o comportamento de 2 geodésicas vizinhas.

Consideremos duas partículas em trajectórias geodésicas vizinhas

$$x^\mu(\tau) , \quad x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau) , \quad \tau \rightarrow \text{parâmetro afim} . \quad (3.10.1)$$

As respectivas equações geodésicas são:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1)} \quad \ddot{x}^\mu(\tau) + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \\ \mathbf{2)} \quad \ddot{x}^\mu(\tau) + \delta\ddot{x}^\mu(\tau) + \underbrace{\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x + \delta x)}_{\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu(x)\delta x^\gamma} \underbrace{(\dot{x}^\alpha + \delta\dot{x}^\alpha)(\dot{x}^\beta + \delta\dot{x}^\beta)}_{(\dot{x}^\alpha + \dot{x}^\beta + 2\dot{x}^\alpha\delta\dot{x}^\beta)} = 0 \end{array} \right. ,$$

$$\simeq (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu(x) + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu(x)\delta x^\gamma) \quad \simeq (\dot{x}^\alpha + \dot{x}^\beta + 2\dot{x}^\alpha\delta\dot{x}^\beta)$$

onde as chavetas exibem termos até à ordem linear em δx e $\delta\dot{x}$. Esta é a ordem em que iremos trabalhar. Subtraindo **2)** - **1)** obtemos

$$\delta\ddot{x}^\mu + 2\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \delta\dot{x}^\beta + \Gamma_{\alpha\beta,\gamma}^\mu \delta x^\gamma \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 . \quad (3.10.2)$$

Esta equação está escrita em termos da segunda derivada parcial de δx^μ . Queremos reescreve-la em termos da segunda derivada covariante. Para obtermos isso, recordamos que, para um vector arbitrário V^μ

$$D_\alpha V^\mu = \partial_\alpha V^\mu + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu V^\beta . \quad (3.10.3)$$

Contraindo com \dot{x}^μ que é o vector tangente à geodésica de referência obtemos

$$\frac{DV^\mu}{d\tau} = \frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\beta\alpha}^\mu V^\beta \dot{x}^\alpha . \quad (3.10.4)$$

Note-se que $D/d\tau \equiv \dot{x}^\alpha D_\alpha$ e $d/d\tau \equiv \dot{x}^\alpha \partial_\alpha$. A segunda derivada covariante de V^μ é:

$$\begin{aligned} D_\beta \left(\frac{DV^\mu}{d\tau} \right) &= \partial_\beta \left(\frac{DV^\mu}{d\tau} \right) + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \frac{DV^\sigma}{d\tau} \\ &\stackrel{(3.10.4)}{=} \partial_\beta \left(\frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu V^\sigma \dot{x}^\alpha \right) + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \left(\frac{dV^\sigma}{d\tau} + \Gamma_{\rho\gamma}^\sigma V^\rho \dot{x}^\gamma \right) . \end{aligned} \quad (3.10.5)$$

Contraindo novamente com \dot{x}^β temos

$$\begin{aligned} \frac{D^2 V^\mu}{d\tau^2} &= \frac{d^2 V^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\alpha,\beta}^\mu \dot{x}^\beta \dot{x}^\alpha V^\sigma + \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \frac{dV^\sigma}{d\tau} \dot{x}^\alpha \\ &\quad + \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu V^\sigma \ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \frac{dV^\sigma}{d\tau} \dot{x}^\beta + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\rho\gamma}^\sigma \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta V^\rho . \end{aligned} \quad (3.10.6)$$

Para aplicarmos este resultado ao nosso caso de interesse consideramos⁴ $V^\mu = \delta x^\mu$; logo

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} &= \overbrace{\delta \ddot{x}^\mu + 2 \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \delta \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta,\sigma}^\mu \delta x^\sigma \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \rightarrow \text{por (3.10.2)} \\ &+ \Gamma_{\alpha\beta\rho}^\mu \underbrace{\ddot{x}^\alpha}_{\text{pela equação das geodésicas}} \delta x^{\beta\rho} + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\rho\gamma}^\sigma \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta \delta x^\rho \\ &- \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta \end{aligned} \quad (3.10.7)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} &= (\Gamma_{\phi\phi\rho\gamma,\beta}^\mu - \Gamma_{\phi\gamma\beta,\phi\rho}^\mu) \delta x^{\phi\rho} \dot{x}^{\phi\gamma} \dot{x}^\beta + (\Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\rho\gamma}^\sigma - \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha) \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta \delta x^\rho \\ &= (\Gamma_{\rho\gamma,\beta}^\mu - \Gamma_{\gamma\beta,\rho}^\mu + \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\rho\gamma}^\sigma - \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha) \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta \delta x^\rho . \end{aligned} \quad (3.10.8)$$

Logo

$$\boxed{\frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} = -R^\mu_{\gamma\rho\beta} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta \delta x^\rho}, \quad (3.10.9)$$

que é a *equação do desvio geodésico*. Esta derivação torna manifesta que a equação de desvio geodésico só é válida em primeira ordem em $\delta x^\mu, \delta \dot{x}^\mu$.

Como já foi referido, o desvio geodésico é a manifestação física das forças de maré. Esta equação torna explícito o facto de que as forças de maré são descritas, em Relatividade Geral, pelo tensor de curvatura.

⁴Pode-se demonstrar que, δx se transforma como um vector, em ordem linear nesta perturbação.

As equações de Einstein e os testes clássicos da Relatividade Geral

4.1 Motivação física das equações de Einstein

No último capítulo introduzimos as equações de Einstein (3.9.16). Estas equações relacionam contracções do tensor de curvatura com o tensor de momento-energia. Como demonstrado na Secção 3.10, o tensor de curvatura descreve o desvio geodésico - a manifestação física das forças de maré. Como tal, as equações de Einstein relacionam as forças de maré com as fontes de campo. Nesta Secção vamos ver que, de facto, uma situação análoga já acontece em gravitação Newtoniana.

Consideremos o movimento relativo de duas partículas em queda livre, em gravitação Newtoniana. Suponhamos que temos uma família de trajectórias $x^i(s, t)$, em que s rotula a trajectória e t é o tempo (Newtoniano) ao longo das trajectórias. O campo das velocidades é

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}, \quad (4.1.1)$$

enquanto que o vector

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial s}, \quad (4.1.2)$$

define um vector que liga trajectórias vizinhas infinitesimalmente próximas - Fig. 4.1.

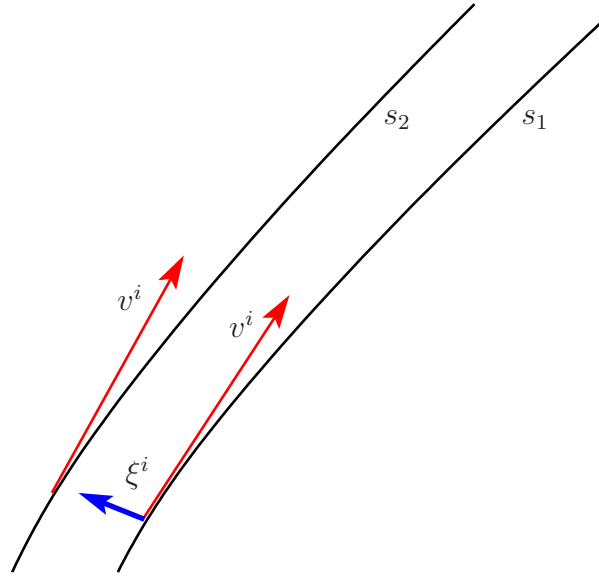


Figura 4.1: Duas trajetórias vizinhas, com rótulos s_1 e s_2 .

Observe-se que de (4.1.1) e (4.1.2) resulta que

$$\frac{\partial v^i}{\partial s} = \frac{\partial \xi^i}{\partial t} . \quad (4.1.3)$$

Seja Φ o potencial gravitacional Newtoniano; então a equação do movimento que origina as trajetórias anteriores será:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} = -\nabla_i \Phi . \quad (4.1.4)$$

Se $s_2 = s_1 + \delta s$ onde $\delta s \ll 1$ temos

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} \Big|_{s_2} \simeq \frac{\partial v^i}{\partial t} \Big|_{s_1} + \delta s \frac{\partial^2 v^i}{\partial t \partial s} \Big|_{s_1} = \frac{\partial v^i}{\partial t} \Big|_{s_1} + \delta s \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial t^2} \Big|_{s_1} . \quad (4.1.5)$$

Observe-se que de (4.1.4): $\frac{\partial v^i}{\partial t} \Big|_{s_1} = -\nabla_i \Phi \Big|_{s_1}$ e analogamente para s_2 . Expandindo a segunda destas relações:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} \Big|_{s_2} = -\nabla_i \Phi \Big|_{s_1} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial s} (-\nabla_i \Phi) \delta s}_{-\xi^j \nabla_j \nabla_i \Phi \delta s} . \quad (4.1.6)$$

Comparando (4.1.5) com (4.1.6) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial t^2} &= -\xi^j \nabla_j \nabla_i \Phi \\ &\equiv -E^i_j \xi^j , \quad i = 1, 2, 3 , \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

onde introduzimos o *tensor de marés Newtoniano*¹

$$E_{ij} \equiv \nabla_i \nabla_j \Phi . \quad (4.1.8)$$

A equação (4.1.7) pode ser comparada com a equação de desvio geodésico numa variedade Riemanniana (3.10.9)

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \delta x^\mu}{d\tau^2} &= -R^\mu_{\gamma\rho\beta} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta \delta x^\rho \\ &\equiv -\mathbb{E}^\mu_{\rho} \delta x^\rho , \quad \alpha = 0, 1, 2, 3 . \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Introduzimos aqui o *tensor de marés eléctrico*, ou *parte eléctrica do tensor de Riemann*:

$$\mathbb{E}^\mu_{\rho} \equiv R^\mu_{\gamma\rho\beta} \dot{x}^\gamma \dot{x}^\beta . \quad (4.1.10)$$

Dado que δx^μ e ξ^i desempenham papéis semelhantes nas duas análises, concluímos que o papel desempenhado pela matriz de segundas derivadas de Φ é análogo ao desempenhado pela contração $R^\alpha_{\mu\beta\gamma} \dot{x}^\mu \dot{x}^\gamma$; expressando em termos da 4-velocidade ($\dot{x}^\mu = u^\mu$):

$$\begin{array}{ccc} \text{Gravidade Newtoniana} & & \text{Geometria Riemanniana} \\ E_{ij} \equiv \nabla_j \nabla_i \Phi & \longleftrightarrow & R_{\alpha\mu\beta\nu} u^\mu u^\nu \equiv \mathbb{E}_{\alpha\beta} . \end{array}$$

Notemos que tanto E_{ij} como $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$ são tensores simétricos (um em espaço plano 3-dimensional, o outro numa variedade Riemanniana arbitrária 4-dimensional).

Dadas as observações anteriores podemos lançar um novo olhar sobre a equação de campo da gravitação Newtoniana:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho . \quad (4.1.11)$$

Esta equação relaciona o traço do tensor de marés Newtoniano E_{ij} com a densidade de matéria ρ . Portanto já em gravitação Newtoniana, a estrutura das equações de campo revela a relação fundamental entre fontes de campo e tensor de marés. A tentativa de

¹Observe-se que dado que estamos a assumir um referencial Cartesiano, é equivalente escrever os índices contravariantes ou covariantes. Note-se ainda que dado que as derivadas covariantes comutam em espaço plano, o tensor E_{ij} é simétrico.

construir uma teoria covariante baseada num princípio semelhante sugere imediatamente que as equações de campo da Relatividade Geral devem relacionar o traço de $\mathbb{E}_{\alpha\beta}$

$$R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} u^{\mu}u^{\nu} = R_{\mu\nu} u^{\mu}u^{\nu} , \quad (4.1.12)$$

que é o tensor de Ricci visto por um observador com 4 velocidade u^{μ} , com a densidade de matéria/energia vista pelo mesmo observador que é

$$\rho = + T_{\mu\nu} u^{\mu}u^{\nu} . \quad (4.1.13)$$

Portanto baseados no princípio da relação entre tensor de marés e fontes, podemos esperar que as equações da Relatividade Geral sejam:

$$R_{\mu\nu} u^{\mu}u^{\nu} \propto T_{\mu\nu} u^{\mu}u^{\nu} , \quad (4.1.14)$$

ou, como é u^{μ} arbitrário,

$$R_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} , \quad (4.1.15)$$

onde k é uma constante a ser determinada no limite Newtoniano. Contudo (4.1.15) sofre de um problema:

$$T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0 \Rightarrow R_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0 , \quad (4.1.16)$$

Mas pelas segundas identidades de Bianchi

$$R_{\mu\nu}{}^{;\nu} = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\nabla^{\nu}R , \quad (4.1.17)$$

o que implicaria que o escalar de Ricci teria de ser constante. Se pelo contrário seguirmos a escolha de Einstein e optarmos pelas equações

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} , \quad (4.1.18)$$

então pelas segundas identidades de Bianchi $G_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0$ e a conservação de energia é equivalente a uma identidade geométrica.

Podemos imediatamente deduzir o valor de k . Como já vimos na Secção 3.9, (4.1.18) implica

$$R_{\mu\nu} = k(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \quad , \quad T \equiv T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} \quad , \quad T_{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} . \quad (4.1.19)$$

A relatividade restrita ensina-nos que

$$T = -\rho + \underbrace{(p_1 + p_2 + p_3)}_{\text{pressões principais}} . \quad (4.1.20)$$

Contraindo (4.1.19) com $u^\mu u^\nu$ temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^\alpha_\alpha &= k \left(\rho + \frac{1}{2}(-\rho + p_1 + p_2 + p_3) \right) \\ &= \frac{k}{2} (\rho + p_1 + p_2 + p_3) . \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

No limite Newtoniano as velocidades são pequenas, ($v \ll c$); logo, nesse limite ($p_i \ll \rho$). Logo

$$\mathbb{E}^\alpha_\alpha \simeq \frac{k}{2} \rho . \quad (4.1.22)$$

Comparando com a equação Newtoniana $E^\alpha_\alpha = 4\pi G\rho$, concluímos que

$$k = 8\pi G , \quad (4.1.23)$$

e como tal, as equações de Einstein são

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (4.1.24)$$

como havia sido antecipado em (3.9.16). No vácuo as equações de Einstein são:

$$R_{\mu\nu} = 0 , \quad (4.1.25)$$

que determinam o campo gravitacional livre no espaço exterior a todas as fontes. Observamos a importância que a conservação de energia $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ teve na motivação de (4.1.24).

A partir de agora (4.1.24) passa a ser um postulado da Relatividade Geral e $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ uma consequência deste postulado. Uma consequência de $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ é a equação das geodésicas para pequenos objectos. Logo, em Relatividade Geral, a equação do movimento das partículas teste pode ser vista como uma consequência das equações de campo, em contraste com o que acontece na gravitação Newtoniana onde $\ddot{\vec{x}} = -\nabla\phi$ é independente de $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ ou do que acontece no electromagnetismo, em que $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ é independente das equações de Maxwell $F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = j^\mu$ e $F_{[\mu\nu;\alpha]} = 0$.

Assim sendo, a totalidade das leis da gravitação de Einstein é sumariada, no vazio, na elegante equação $R_{\mu\nu} = 0$, enquanto que na presença de matéria é sumariada nas equações (4.1.24).

4.2 A aproximação de pequenas velocidades e campos fracos

O argumento da Secção anterior para a construção das equações de campo da Relatividade Geral baseou-se numa analogia entre tensores de marés Newtoniano e relativista. Mostremos agora em detalhe que, no limite apropriado, podemos recuperar a gravitação Newtoniana das equações da Relatividade Geral. Este limite tem duas premissas:

- i) é o limite de pequenas velocidades: todas as velocidades envolvidas obedecem a

$$v \ll c, \quad (4.2.1)$$

e como tal todas as derivadas temporais (no sistema coordenado introduzido na segundo premissa) são sub-dominantes: $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \ll \frac{\partial}{\partial x}$ (ou seja, a razão de variação por ano é muito menor que a razão de variação por ano-luz).

- ii) Assumimos ainda que, localmente, podemos encontrar um sistema coordenado que é aproximadamente Cartesiano no qual a métrica é aproximadamente a métrica de

Minkowski:

$$\begin{aligned} & \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \rightarrow \{t, x^i\} \\ g_{\mu\nu} &= \underbrace{\eta_{\mu\nu}} + \underbrace{\varepsilon}_{\ll 1} h_{\mu\nu} ; \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

o significado desta equação é que o campo gravitacional (no sentido relativista) é fraco. Consequentemente, em 1ª ordem em ε

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon h^{\mu\nu} , \quad (4.2.3)$$

onde os índices $h^{\mu\nu}$ se sobem com $\eta^{\mu\nu}$

$$\eta^{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} = \delta^{\mu\nu} , \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} . \quad (4.2.4)$$

De acordo com a primeira premissa, assumimos que, neste sistema coordenado, para qualquer função de interesse f , as derivadas temporais são sempre muito menores que as espaciais:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = O(\varepsilon) \times \frac{\partial f}{\partial x^i} , \quad i = 1, 2, 3 . \quad (4.2.5)$$

Pretendemos mostrar que, com estas hipóteses:

Equação geodésica	se reduz	Lei da força de Newton
$u^\alpha D_\alpha u^\mu = 0$	\longrightarrow	$\frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = -\nabla^i \Phi ;$

(4.2.6)

Equação de Einstein	se reduzem	Equação de Newton-Poisson
$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$	\longrightarrow	$\Delta\phi = 4\pi G\rho .$

(4.2.7)

Começemos por demonstrar (4.2.6). Para a equação geodésica necessitamos dos símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\beta\mu,\nu} + h_{\beta\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\beta}) + O(\varepsilon) . \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

A equação das geodésicas fica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} . \quad (\tau \text{ é o tempo próprio}) \quad (4.2.9)$$

Mas $\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \underbrace{\frac{dx^i}{dt}}_v = O(\varepsilon) , \quad i = 1, 2, 3 ;$

e $\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} = 1 + O(\varepsilon) , \quad \text{i.e. } t = \tau \text{ a menos de correcções em } \frac{v}{c} . \quad (4.2.10)$

Logo, para uma partícula “lenta” a equação das geodésicas fica

$$\underbrace{\frac{d^2 x^i}{d\tau^2}}_{\frac{d^2}{dt^2} x^i} + \Gamma_{00}^i \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = O(\varepsilon^2) . \quad (4.2.11)$$

Precisamos pois de calcular

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= \frac{\varepsilon}{2} \underbrace{\eta^{ij}}_{\delta^{ij}} \underbrace{(2h_{j0,0} - h_{00,j})}_{\text{negligenciável}} + O(\varepsilon^2) . \\ &= -\frac{\varepsilon}{2} h_{00}{}^{,i} + O(\varepsilon^2) . \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

Deste modo a equação (4.2.11) fica:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \left(-\frac{\varepsilon}{2} h_{00}{}^{,i} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{2} \Delta^i h_{00} . \quad (4.2.13)$$

Esta é a equação da força Newtoniana se identificarmos

$$\boxed{g_{00} = -1 + \varepsilon h_{00} = -(1 + 2 \underbrace{\Phi}_{\text{potencial Newtoniano}}) + O(\varepsilon^2)} \quad (4.2.14)$$

potencial Newtoniano .

Isto demonstra a redução (4.2.6). Concluimos ainda que o potencial Newtoniano (e de facto toda a teoria Newtoniana) está contido na componente g_{00} da métrica.

Para demonstrar a redução das equações de Einstein à equação de Poisson (4.2.7) necessitamos do tensor de Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = + \Gamma_{\alpha\beta,\mu}^\mu - \Gamma_{\alpha\mu,\beta}^\mu + O(\varepsilon^2) . \quad (4.2.15)$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \Gamma_{00,i}^i + O(\varepsilon^2) \\
 &= -\frac{\varepsilon}{2} h_{00,i}^i + O(\varepsilon^2) \\
 &= \Delta\Phi + O(\varepsilon^2) .
 \end{aligned}
 \tag{4.2.16}$$

Consequentemente, as equações de Einstein $R_{00} = 8\pi G (T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T)$ ficam (componente 00)

$$\Delta\phi \simeq 4\pi G\rho , \tag{4.2.17}$$

o que demonstra a redução (4.2.7).

Resumindo: a lei da força Newtoniana obriga-nos a fazer a identificação (4.2.11); a equação de Newton-Poisson é, então, consequência da componente temporal das equações de Einstein.

Notemos que qualquer teoria da gravitação que incorpore a hipótese geodésica tem, necessariamente, de fazer a identificação (4.2.11); logo esta não é uma característica única da Relatividade Geral. Como tal, consequências experimentais de (4.2.11) (como o redshift gravitacional e a dilatação do tempo) não constituem um teste da Relatividade Geral no sentido de testarem a estrutura específica das equações de campo (excepto no sentido que um resultado negativo falsificaria a teoria).

4.3 A solução de Schwarzschild

Para testar a teoria da Relatividade Geral para além do limite Newtoniano, poderíamos começar por usar a teoria linearizada, i.e., a chamada *aproximação pós-Newtoniana*. Mas como a solução exacta para uma massa pontual (solução de Schwarzschild) é relativamente simples optamos aqui por deduzir, desde já, esta solução.

O procedimento habitual para calcular soluções em Relatividade Geral é o de considerar um “ansatz” para a métrica (e para todos os outros campos dinâmicos caso os haja). Para o caso de uma massa pontual queremos considerar o ansatz mais geral com simetria esférica.

Recordemos que o espaço de Minkowski em coordenadas esféricas é

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 \underbrace{(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}_{d\Omega_2 \text{ elemento de linha em } S^2}.$$

Logo, a métrica mais geral com simetria esférica é:

$$ds^2 = -\alpha(r, t)dt^2 + \beta(r, t)dr^2 + \gamma(r, t)dtdr + \varepsilon(r, t)d\Omega_2, \quad (4.3.1)$$

onde α, β, γ são funções arbitrárias dos argumentos. Este “ansatz” preserva a estrutura de $d\Omega_2$ e nada depende de θ ou ϕ .

Exercício 4.1: Simetria esférica do ansatz (4.3.1). Verifique que os vectores:

$$\xi_{(1)} = \sin \phi \partial_\theta + \cot \theta \cos \phi \partial_\phi,$$

$$\xi_{(2)} = -\cos \phi \partial_\theta + \cot \theta \sin \phi \partial_\phi,$$

$$\xi_{(3)} = -\partial_\phi,$$

são vectores de Killing de (4.3.1). Conclua que o grupo de isometrias de (4.3.1) contém de facto como subgrupo $SO(3)$ e como tal a métrica (4.3.1) tem simetria esférica.

O ansatz (4.3.1) contém 4 funções desconhecidas de 2 variáveis e como tal a sua resolução é complexa. Felizmente pode ser consideravelmente simplificado apenas por transformações de coordenadas:

i) Transformamos

$$r, t \longrightarrow R, t, \quad \text{isto é encaramos } r = r(R, t),$$

de modo a que

$$\varepsilon(r, t) = R^2; \quad (4.3.2)$$

obtemos

$$ds^2 = -\alpha'(R, t)dt^2 + \beta'(R, t)dR^2 + \gamma'(R, t)dtdR + R^2 d\Omega_2, \quad (4.3.3)$$

onde α', β', γ' são novas funções arbitrárias dos argumentos.

ii) Transformamos

$$R, t \longrightarrow R, T, \quad \text{isto é encaramos } t = t(R, T);$$

logo

$$dt = \frac{\partial t}{\partial R} dR + \frac{\partial t}{\partial T} dT,$$

e a métrica fica

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\alpha' \left(\frac{\partial t}{\partial T} \right)^2 dT^2 + \left(-\alpha' \left(\frac{\partial t}{\partial R} \right)^2 + \beta' + \gamma' \left(\frac{\partial t}{\partial R} \right) \right) dR^2 \\ & + \frac{\partial t}{\partial T} \left(\gamma' - 2\alpha' \frac{\partial t}{\partial R} \right) dT dR + R^2 d\Omega_2; \end{aligned}$$

escolhendo $t = t(T, R)$ tal que

$$\frac{\partial t}{\partial R} = \frac{\gamma'}{2\alpha'},$$

livramo-nos do termo não diagonal e como tal o ansatz da métrica fica:

$$\boxed{ds^2 = -e^{2A(R,T)} dT^2 + e^{2B(R,T)} dR^2 + R^2 d\Omega_2}. \quad (4.3.4)$$

Este ansatz tem “apenas” 2 funções desconhecidas (em 2 variáveis); ainda é bem complexo, mas, como veremos de seguida, permite integrar as equações de Einstein.

Para calcular as equações de Einstein para o ansatz (4.3.4) começemos por obter as várias quantidades geométricas (no que se segue denotamos as coordenadas do ansatz (4.3.4) por (r, t) em vez de (R, T)):

- Símbolos de Christoffel: ($\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$)

$$\Gamma_{tt}^t = \dot{A}; \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{A' e^{2A}}{e^{2B}}; \quad \Gamma_{rt}^t = A'; \quad \Gamma_{tr}^r = \dot{B};$$

$$\Gamma_{rr}^t = \frac{\dot{B} e^{2B}}{e^{2A}}; \quad \Gamma_{rr}^r = B'; \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}; \quad \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r};$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{e^{2B}}; \quad \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}; \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2\theta}{e^{2B}}; \quad \Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta;$$

todos os outros (menos os relacionados por simetria com os apresentados) são nulos.

- Tensor de Riemann: ($R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}$)

$$R^t_{\ rtr} = \frac{(-A'' - (A')^2 + A'B')e^{2A} + e^{2B}(\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{B} + \ddot{B})}{e^{2A}};$$

$$R^t_{\ \theta t\theta} = -\frac{A'r}{e^{2B}}; \quad R^t_{\ \phi t\phi} = -\frac{A'r \sin^2 \theta}{e^{2B}};$$

$$R^t_{\ \theta r\theta} = -\frac{\dot{B}r}{e^{2A}}; \quad R^t_{\ \phi r\phi} = -\frac{\dot{B}r \sin^2 \theta}{e^{2A}};$$

$$R^r_{\ ttr} = \frac{(-A'' - (A')^2 + A'B')e^{2A} + e^{2B}(\dot{B}^2 - \dot{A}\dot{B} + \ddot{B})}{e^{2B}};$$

$$R^r_{\ \theta t\theta} = \frac{\dot{B}r}{e^{2B}}; \quad R^r_{\ \phi t\phi} = \frac{\dot{B}r \sin^2 \theta}{e^{2B}};$$

$$R^r_{\ \theta r\theta} = \frac{B'r}{e^{2B}}; \quad R^r_{\ \phi r\phi} = \frac{B'r \sin^2 \theta}{e^{2B}};$$

$$R^\theta_{\ tt\theta} = -\frac{A'e^{2A}}{re^{2B}}; \quad R^\theta_{\ tr\theta} = -\frac{\dot{B}}{r}; \quad R^\theta_{\ rt\theta} = -\frac{\dot{B}}{r};$$

$$R^\theta_{\ rr\theta} = -\frac{B'}{r}; \quad R^\theta_{\ \phi\theta\phi} = \frac{\sin^2 \theta (e^{2B} - 1)}{e^{2B}};$$

$$R^\phi_{\ tt\phi} = -\frac{A'e^{2A}}{re^{2B}}; \quad R^\phi_{\ tr\phi} = -\frac{\dot{B}}{r}; \quad R^\phi_{\ rt\phi} = -\frac{\dot{B}}{r};$$

$$R^\phi_{\ rr\phi} = -\frac{B'}{r}; \quad R^\phi_{\ \theta\theta\phi} = -\frac{e^{2B} - 1}{e^{2B}};$$

todos os outros (menos os relacionados por simetria com os apresentados) são nulos.

- Tensor de Ricci: ($R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\ \mu\alpha\nu}$)

$$R_{tt} = \frac{(-A'B'r + A''r + rA'^2 + 2A')e^{2A} + re^{2B}(\dot{A}\dot{B} - \ddot{B} - \dot{B}^2)}{re^{2B}};$$

$$R_{tr} = \frac{\dot{B}}{r};$$

$$R_{rr} = \frac{(2B' + A'B'r - A'^2r - A''r)e^{2A} + (\ddot{B}r + \dot{B}^2r - \dot{A}\dot{B}r)e^{2B}}{e^{2A}r};$$

$$R_{\theta\theta} = -\frac{1 - e^{2B} - B'r + A'r}{e^{2B}};$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta};$$

todos os outros (menos os relacionados por simetria com os apresentados) são nulos.

Como estamos no vácuo, as equações de Einstein são $R_{\mu\nu} = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} i) \quad & \dot{B} = 0 , \\ ii) \quad & 2A' + r(A'^2 + A'' - A'B') = 0 , \\ iii) \quad & 2B' - r(A'^2 + A'' - A'B') = 0 , \\ iv) \quad & (A' - B')r + 1 - e^{2B} = 0 . \end{aligned}$$

A equação *i*) tem uma importância fundamental, dado que permitiu eliminar todas as derivadas temporais nas restantes equações. Para resolver este sistema começamos por somar *ii*) com *iii*); obtemos

$$A' + B' = 0 . \quad (4.3.5)$$

Logo *iv*) fica: $-2B'r + 1 - e^{2B} = 0$, ou ainda, multiplicando por e^{-2B} :

$$-2B're^{-2B} + e^{-2B} - 1 = 0 \Leftrightarrow r \frac{d}{dr}(e^{-2B}) + e^{-2B} - 1 = 0 . \quad (4.3.6)$$

Definindo $y = e^{-2B}$ a equação (4.3.6) reescreve-se:

$$r \frac{dy}{dr} + y - 1 = 0 . \quad (4.3.7)$$

Esta é uma equação diferencial de 1ª ordem com o seguinte diferencial associado:

$$r dy + (y - 1) dr ;$$

este diferencial é exacto; é o diferencial da função

$$h(r, y) = r(y - 1) + C .$$

Como tal, a solução da equação (4.3.7) é

$$\boxed{y = e^{-2B} = 1 + \frac{C}{r}} .$$

Como

$$\begin{aligned} A' = -B' & \Rightarrow A(t, r) = -B(t, r) + f(t) \\ & \Rightarrow e^{2A} = e^{-2B} e^{f(t)} = e^{f(t)} \left(1 - \frac{C}{r}\right) , \end{aligned}$$

pelo que, finalmente a solução é:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{C}{r}\right) \underbrace{e^{f(t)} dt^2}_{\text{redefinimos numa nova coordenada } dt^2} + \frac{dr^2}{1 - \frac{C}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.3.8)$$

e obtemos a solução de Schwarzschild:

$$\boxed{ds^2 = - \left(1 - \frac{C}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{C}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}. \quad (4.3.9)$$

Falta interpretar a constante \underline{C} . Para o fazermos primeiro introduzimos coordenadas isotrópicas definidas de modo a que as secções espaciais da métrica fiquem a métrica de \mathbb{R}^3 a menos de um factor multiplicativo total - *factor conforme*. As coordenadas pretendidas são obtidas requerendo que:

$$\begin{cases} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{C}{r}}} = f(R)dR, \\ r = f(R)R, \end{cases} \Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{C}{r}}};$$

integrando obtemos

$$\ln R + \alpha = \ln \left(r - \frac{C}{2} + \sqrt{r^2 - Cr} \right). \quad (4.3.10)$$

(Verificação:

$$\frac{d}{dr} \ln \left(r - \frac{C}{2} + \sqrt{r^2 - Cr} \right) = \frac{1 + \frac{2r-C}{2\sqrt{r^2-Cr}}}{r - \frac{C}{2} + \sqrt{r^2 - Cr}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - Cr}}, \quad (4.3.11)$$

como requerido.) Consequentemente (tomamos $\alpha = \ln 2$ para ter assintoticamente $r = R$),

$$2R = r - \frac{C}{2} + \sqrt{r^2 - Cr}, \quad (4.3.12)$$

e a métrica fica:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{C}{r(R)}\right) dt^2 + f(R)^2(dR^2 + R^2 d\Omega_2), \quad (4.3.13)$$

com $f(R) = \frac{r(R)}{R}$ e $R = \frac{1}{2} \left(r - \frac{C}{2} + \sqrt{r^2 - Cr} \right)$.

Assimptoticamente $r \rightarrow \infty$ e $R \rightarrow \infty$

$$R \simeq \frac{1}{2} \left(r - \frac{C}{2} + \left(1 - \frac{C}{2r} \right) \right) \simeq \frac{1}{2} (2r - C) ; \quad (4.3.14)$$

logo $r \simeq R + \frac{C}{2} \Rightarrow f(R) = 1 + \frac{C}{2R}$, e a métrica reescreve-se, neste limite,

$$ds^2 \simeq - \left(1 - \frac{C}{R} \right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{R} \right) (dR^2 + R^2 d\Omega_2) . \quad (4.3.15)$$

Esta métrica é da forma

$$ds^2 \simeq \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (4.3.16)$$

onde

$$h_{\mu\nu} = \begin{array}{c} t \\ x \\ y \\ z \end{array} \left(\begin{array}{c|c} C/R & 0 \\ \hline 0 & C/R \delta_{ij} \end{array} \right) .$$

Recordemos que vimos na Secção 4.2 para uma geometria da forma (4.3.16), no regime onde C/R é pequeno, o potencial Newtoniano está contido na componente tempo-tempo da perturbação métrica (cf. (4.2.14))

$$h_{00} = -2\Phi . \quad (4.3.17)$$

Deste modo, para a métrica de Schwarzschild reproduzir, quando C/R é pequeno, o campo Newtoniano de uma massa pontual requeremos que

$$\frac{C}{R} = -2 \left(-\frac{GM}{R} \right) ,$$

de onde resulta, finalmente, a determinação da constante C em termos da massa M da fonte do campo

$$C = 2GM . \quad (4.3.18)$$

Assim, a métrica de Schwarzschild em termos do parâmetro físico massa escreve-se:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (4.3.19)$$

onde $r_S \equiv 2GM/c^2$ se designa por *raio de Schwarzschild*.

A métrica de Schwarzschild é estática; de facto, o vector $k = \partial/\partial t$, que é temporal para $r > r_S$, é vector de Killing. Como tal o grupo de isometrias é

$$\mathbb{R} \times \text{SO}(3) .$$

Como impusemos apenas simetria esférica, a simetria adicional - a invariância temporal - é consequência da simetria esférica para a Relatividade Geral. Este é o conteúdo do teorema de Birkhoff:

$$\text{SO}(3) \text{ mais } R_{\mu\nu} = 0 \implies \text{estaticidade (característica da métrica de Schwarzschild)} .$$

A estrutura da teoria, deste modo, exclui, por exemplo, um campo gravitacional com simetria esférica a pulsar. Tal campo não existe no vácuo em Relatividade Geral.

4.4 Geodésicas temporais e o avanço do periélio

As geodésicas com parametrização afim podem ser derivadas do Lagrangiano

$$L = -V(r) \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{V(r)} + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) ,$$

onde “ $\dot{\cdot}$ ” = $\frac{d}{d\lambda}$ e λ é o parâmetro afim. Como estamos a considerar as geodésicas temporais tomamos $\lambda = \tau$ (tempo próprio).

A equação de θ é resolvida por $\theta = \pi/2$, como resultado da simetria esférica. As equações de t e ϕ originam as quantidades conservadas:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{V(r)} , \quad E \equiv \text{Energia por unidade de massa (adimensional)} ; \quad (4.4.1)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{j}{r^2} , \quad j \equiv \text{Momento angular por unidade de massa} . \quad (4.4.2)$$

(dimensão de comprimento)

A equação radial pode ser obtida do Lagrangiano, substituindo $L = -1$ e usando (4.4.1) e (4.4.2)

$$-1 = -V(r) \frac{E^2}{V(r)^2} + \frac{\dot{r}^2}{V(r)} + r^2 \frac{j^2}{r^4} \Leftrightarrow \boxed{\dot{r}^2 = E^2 - V(r) \left(1 + \frac{j^2}{r^2}\right)}. \quad (4.4.3)$$

Exercício 4.2: Geodésicas na solução de Schwarzschild linearizada. Mostre um facto curioso: considerando a teoria linearizada (cf. (4.3.15)) as equações das geodésicas são as mesmas das obtidas da solução exacta.

Resolução: De facto, a solução de Schwarzschild linearizada é:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega_2; \quad (4.4.4)$$

as equações para θ, t, ϕ são, obviamente inalteradas. A equação de r fica

$$\begin{aligned} -1 &= -V(r) \frac{E^2}{V(r)^2} + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \dot{r}^2 + \frac{j^2}{r^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dot{r}^2 &= \frac{1}{V(r) \left(1 + \frac{2M}{r}\right)} E^2 - \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(1 + \frac{j^2}{r^2}\right) \\ &= E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{j^2}{r^2}\right), \quad \text{onde linearizamos } \left(\frac{2M}{r} \ll 1\right), \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

o que coincide com (4.4.3). Logo, as equações geodésicas na solução exacta de Schwarzschild coincidem com as equações geodésicas (linearizadas) na solução de Schwarzschild linearizada!

Procuramos de seguida resolver as equações geodésicas. Para estudarmos as órbitas no plano $r - \phi$ introduzimos, tal como no problema de Kepler, a variável

$$u = \frac{1}{r}, \quad (4.4.6)$$

e queremos obter a equação diferencial para $u = u(\phi)$; notamos que

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{j} \frac{dr}{d\tau}. \quad (4.4.7)$$

Logo

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{j^2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2}{j^2} - (1 - 2Mu) \left(\frac{1}{j^2} + u^2\right), \quad (4.4.8)$$

pelo que a equação diferencial a resolver fica:

$$\boxed{\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{E^2 - 1}{j^2} + \frac{2M}{j^2}u - u^2 + 2Mu^3}. \quad (4.4.9)$$

Exercício 4.3: Comparação com o problema de Newton/Kepler. Mostre que o problema de Newton/Kepler é obtido negligenciando o último termo de (4.4.9).

Resolução: Para verificar que assim é, notamos que o Lagrangeano do problema de Newton/Kepler é

$$L_{NK} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{GMm}{r}, \quad (4.4.10)$$

pelo que os momentos canônicos conjugados são $p_r = m\dot{r}$, $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ e $p_\phi = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$ e o Hamiltoniano

$$H_{NK} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} - \frac{GMm}{r}. \quad (4.4.11)$$

Esta teoria é resolvida por $\theta = \frac{\pi}{2}$ e

$$p_\phi = mr^2\dot{\phi} = \text{const} \Leftrightarrow \dot{\phi} = \frac{j}{r^2}; \quad (4.4.12)$$

j é momento angular por unidade de massa. Em vez de considerarmos a equação em r tomamos $H_{NK} = \varepsilon = \text{const}$, (energia não relativista). Escrevendo os momentos canônicos em termos das velocidades temos:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \frac{j^2}{r^4} \right) - \frac{GMm}{r} \Leftrightarrow \boxed{\dot{r}^2 = \frac{2\varepsilon}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{j^2}{r^2}}. \quad (4.4.13)$$

Para compararmos com (4.4.3), que reescrevemos na forma

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - 1 + \frac{2GM}{r} - \frac{j^2}{r^2} + \frac{2GMj^2}{r^3}, \quad (4.4.14)$$

é útil reparar que a energia total relativista, denotada por \tilde{E} , é

$$\tilde{E} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

e como tal a energia relativista por unidade de massa é ($c = 1$)

$$E = \frac{\tilde{E}}{m} = 1 + \frac{\varepsilon}{m} + \dots$$

$$E^2 - 1 \simeq \left(1 + \frac{\varepsilon}{m} + \dots\right)^2 - 1 \simeq \frac{2\varepsilon}{m} + \dots$$

Logo (4.4.13) é de facto a aproximação não relativista de (4.4.14); mas o termo em r^3 não está presente em (4.4.13). Introduzindo $u = 1/r$ e passando para $u = u(\phi)$ (4.4.13) fica

$$\boxed{\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2\varepsilon}{mj^2} + \frac{2GM}{j^2}u - u^2} . \quad (4.4.15)$$

Confirmamos assim que o último termo em (4.4.9) é o termo não Kepleriano.

Começamos por resolver (4.4.9) sem o termo não Kepleriano. Denotamos $du/d\phi = u'$ e fazemos

$$u = u_0 + V , \quad (4.4.16)$$

onde u_0 é uma constante que será escolhida de modo a eliminar o termo linear na equação.

A equação (4.4.9) fica

$$(V')^2 = \frac{E^2 - 1}{j^2} + \frac{2M}{j^2}(u_0 + V) - u_0^2 - 2u_0V - V^2 \quad (4.4.17)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(V')^2 + V^2 = \left(\frac{E^2 - 1}{j^2} - u_0^2 + \frac{2M}{j^2}u_0\right) + 2V\left(\frac{M}{j^2} - u_0\right)} . \quad (4.4.18)$$

Escolhemos $u_0 = M/j^2$; logo a equação fica

$$(V')^2 + V^2 = \underbrace{\frac{E^2 - 1}{j^2} + \frac{M^2}{j^4}}_{\equiv A^2} . \quad (4.4.19)$$

A solução é $V(\phi) = A \sin(\phi - \phi_0)$, ou em termos da coordenada radial,

$$\boxed{r(\phi) = \frac{1}{u(\phi)} = \frac{1}{u_0 + V(\phi)} = \frac{1}{\frac{M}{j^2} + \sqrt{\frac{M^2}{j^4} + \frac{E^2 - 1}{j^2}} \sin(\phi - \phi_0)} .} \quad (4.4.20)$$

Recordando que

$$r(\phi) = \frac{\alpha}{1 + e \sin(\phi - \phi_0)} ,$$

é a equação de uma cónica de excentricidade e , verificamos que estamos a obter uma cónica de excentricidade

$$e = \sqrt{1 + \frac{j^2(E^2 - 1)}{M^2}} . \quad (4.4.21)$$

Para os estados ligados ($E^2 < 1$) obtemos elipses, em concordância com as leis de Kepler.

Reconsideremos agora a (4.4.9) mas incluindo o termo não Kepleriano. Fazemos novamente

$$u = u_0 + V ,$$

com o propósito de eliminarmos o termo linear. A equação fica:

$$\begin{aligned} (V')^2 &= \frac{E^2 - 1}{j^2} + \frac{2M}{j^2}(u_0 + V) - u_0 + V^2 + 2M(u_0 + V)^3 \Leftrightarrow \\ (V')^2 &= \underbrace{\left(\frac{E^2 - 1}{j^2} + \frac{2Mu_0}{j^2}u_0^2 + 2Mu_0^3 \right)}_{A^2} + V \left(\frac{2M}{j^2} - 2u_0 + 6Mu_0^2 \right) \\ &\quad - \underbrace{(1 - 6Mu_0)}_{w^2} V^2 + 2MV^3 . \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Para eliminarmos o termo linear em V escolhemos u_0 de modo a que

$$6Mu_0^2 - 2u_0 + \frac{2M}{j^2} = 0 \Leftrightarrow u_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 3M \times \frac{M}{j^2}}}{6M} . \quad (4.4.23)$$

Se $12M^2/j^2$ for pequeno

$$u_0 \simeq \frac{1 \pm (1 - 6\frac{M^2}{j^2})}{6M} = \begin{cases} \frac{1}{3M} - \frac{M}{j^2} \\ \frac{M}{j^2} \longrightarrow \text{solução Kepleriana} \end{cases}$$

Escolhemos por isso a segunda solução dado que aproxima a solução Kepleriana quando $M \rightarrow 0$ (a outra diverge):

$$u_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 12\frac{M^2}{j^2}}}{6M}. \quad (4.4.24)$$

Note-se que $12M^2/j^2 < 1$ é a condição para ter estados ligados em Schwarzschild.

A equação diferencial (4.4.22) fica com a forma

$$\boxed{(V')^2 = A^2 - w^2V^2 + 2MV^3}. \quad (4.4.25)$$

Esta equação pode ser resolvida em termos de funções elípticas. Mas a propriedade mais relevante pode ser obtida negligenciando o termo em V^3 . A solução fica

$$V(\phi) \simeq A \sin(w(\phi - \phi_0)). \quad (4.4.26)$$

Como a frequência angular $w < 1$ a ‘elipse’ não fecha em cada órbita; o período angular é agora

$$\frac{2\pi}{w} > 2\pi. \quad (4.4.27)$$

O periélio vai estar em (usando $r \propto 1/(1 + e \sin(\phi - \phi_0))$)

$$(\phi - \phi_0)w = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \dots \quad (4.4.28)$$

Logo, numa revolução avança $\frac{5}{2}\frac{\pi}{w} - \frac{\pi}{2w} = \frac{2\pi}{w}$ menos 2π ou seja

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{w} - 2\pi = 2\pi((1 - 6Mu_0)^{-\frac{1}{2}} - 1). \quad (4.4.29)$$

Como $u_0 = \frac{M}{j^2} + O(M^2)$, em 1ª ordem na massa

$$\Delta\phi = 2\pi \left(1 + 3\frac{M^2}{j^2} - 1 \right) = \frac{6\pi M^2}{j^2}. \quad (4.4.30)$$

Podemos eliminar a dependência em j usando considerações geométricas: numa elipse

$$r = \frac{\alpha}{1 + e \sin(\phi - \phi_0)} \Rightarrow \begin{cases} r_{\max} = \frac{\alpha}{1-e} \\ r_{\min} = \frac{\alpha}{1+e} \end{cases} \Rightarrow r_{\min} + r_{\max} = \frac{2\alpha}{1 - e^2}. \quad (4.4.31)$$

Dado que o semi-eixo maior a obedece a $2a = r_{\min} + r_{\max}$ obtemos

$$\alpha = a(1 - e^2) . \quad (4.4.32)$$

Comparando com a solução Kepleriana que tem $\alpha = \frac{j^2}{M}$ obtemos

$$\frac{j^2}{M} = a(1 - e^2) . \quad (4.4.33)$$

Logo, a fórmula para o avanço do periélio (\Leftrightarrow semi-eixo maior) no espaço-tempo de Schwarzschild é:

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}} \quad \text{S.I. em primeira ordem na massa .} \quad (4.4.34)$$

Note-se, portanto que o avanço é tanto maior quanto menor o semi-eixo maior (i.e. quanto mais próximo) do sol, como esperado, mas é também tanto maior quanto maior a excentricidade da elipse. Mercúrio, para além de ter o menor semi-eixo maior do sistema solar tem também a maior excentricidade entre todos os planetas (excepto o planeta anão Plutão):

Planeta	Excentricidade
Mercúrio	0.20562
Vénus	0.0067
Terra	0.0167
Marte	0.0935
Júpiter	0.0489
Saturno	0.0565
Urano	0.0457
Neptuno	0.0113
Plutão	0.2488

Usando na fórmula os dados de Mercúrio: (SI)

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 57.91 \times 10^9 \\ e = 0.2056 \\ G = 6.673 \times 10^{-11} \longrightarrow \Delta\phi = 0.103''/\text{rev} . \\ M_{Sun} = 1.983 \times 10^{30} \\ c = 2.998 \times 10^8 \end{array} \right.$$

Usando o período da órbita de Mercúrio, $T = 0.2408$, anos e sabendo que Mercúrio faz 415.28 rev/século, obtemos

$$\Delta\phi = 42.78''/\text{século} . \quad (4.4.35)$$

Deste modo absolutamente brilhante e a partir de primeiros princípios Einstein explicava o avanço anômalo do periélio de Mercúrio de $42.7''/\text{século}$ discutido na Secção 2.1.2.

Nota histórica: Nas palavras de Einstein, escritas a 18 de Novembro de 1915, a teoria da Relatividade Geral “*explica [...] quantitativamente [...] a rotação secular da órbita de Mercúrio, descoberta por Le Verrier [...] sem necessidade de qualquer hipótese especial.*”

Na opinião do seu biógrafo, Abraham Pais (pág. 313 “Subtil é o Senhor- Gradiva), “*Esta descoberta foi, creio, sem dúvida, a mais forte experiência emocional da vida científica de Einstein, talvez mesmo de toda a sua vida. A natureza falara com ele. Tinha de estar certo.*” Einstein escreveu “*Durante alguns dias estive fora de mim com uma feliz excitação.*” Mais tarde, Einstein diria a Fokker que a descoberta lhe tinha provocado palpitações do coração; a de Haas disse que quando viu que os cálculos concordavam com as observações astronómicas inexplicadas, teve a sensação que qualquer coisa tinha estalado nele...

A descoberta de Einstein resolveu uma dificuldade que era conhecida há mais de sessenta anos. Urbain Jean Joseph Le Verrier tinha sido o primeiro a encontrar provas de uma anomalia na órbita de Mercúrio e também o primeiro a tentar explicar esse efeito. Em 12 de Setembro de 1859 submeteu à Academia de Ciências de Paris o texto de uma carta a Hervé Faye na qual registou o que descobriu. O periélio de Mercúrio avança $38''/\text{século}$

devido a “*alguma acção até agora desconhecida sobre a qual nenhuma luz foi lançada, [...] uma grave dificuldade digna da atenção dos astrónomos.*”

Nessa carta Le Verrier observava ainda que o único modo de explicar o efeito em termos de corpos conhecidos seria aumentar a massa de Vénus em pelo menos 10%, uma modificação inadmissível. Duvidava fortemente de um planeta interior a Mercúrio, não observado até então, pudesse ser a causa (mas sugeriu esta possibilidade). Terminou dizendo “*Aqui, pois, mon cher confrère, reside uma nova complicação que se manifesta nas proximidades do Sol.*”

Em 1882 Simon Newcomb obteve o valor de 43”/século, valor que não variou consideravelmente até ao presente. O valor experimental citado por Einstein em 18 de Novembro de 1915 era $45'' \pm 5$. Entre finais do séc. XIX e princípios do século XX foram numerosas as tentativas de interpretação teórica da anomalia de Mercúrio:

- Reconsideraram-se as sugestões de Le Verrier de um planeta interior a Mercúrio ou de um anel planetário (enxame de asteróides). Na década de 1870 pensou-se momentaneamente que um tal planeta (a que se chamou Vulcano) tinha sido realmente avistado.
- Sugeriu-se uma Lua de Mercúrio (não avistada), poeira inter planetária e um possível achatamento do Sol.
- Sugeriu-se um desvio da Lei $\frac{1}{r^2}$; quer puramente estático quer corrigida por termos dependentes da velocidade (teoria da gravitação de Lorentz).

Estas tentativas falharam ou não tiveram interesse por envolverem parâmetros ajustáveis. A anomalia permaneceu enigmática. Nos últimos anos Newcomb tendia a “*dar preferência à hipótese de a gravitação solar não se comportar exactamente como o inverso de um quadrado*”. Neste contexto, a alegria de Einstein por poder dar uma explicação “*sem qualquer hipótese especial*” torna-se ainda mais compreensível.

Alguns comentários sobre o cálculo que Einstein efectuou:

- Einstein não tinha ainda a forma final das equações de campo $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$;
- Einstein não tinha ainda a solução de Schwarzschild, apresentada apenas num artigo de 16 de Janeiro de 1916 da Academia Prussiana.

Einstein partiu das equações de campo

$$r_{\mu\nu} = k \underbrace{T_{\mu\nu}}_{\text{tensor de impulsão energia}} \quad \text{com a condição geral } \sqrt{|g|} = 1, \quad (4.4.36)$$

em que $r_{\mu\nu}$ correspondia a uma parte do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\sigma}^{\alpha} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma} . \\ &= \underbrace{\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma}}_{r_{\mu\nu}} + \underbrace{(-\partial_{\nu} \partial_{\mu} \ln \sqrt{|g|} + \partial_{\sigma} \ln \sqrt{|g|} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma})}_{s_{\mu\nu}} \end{aligned} \quad (4.4.37)$$

No tratamento moderno partimos de $R_{\mu\nu} = 0$ e podemos escolher um sistema de coordenadas tal que $\sqrt{g} = 1$. Os resultados, relativamente ao efeito, são os mesmos, facto de que Einstein se apercebeu durante a preparação do artigo.

Einstein utilizou um método de aproximação que marcou o início da mecânica celeste pós-Newtoniana. Ele obteve a solução linearizada:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 + \left(\delta_{ij} + \alpha \frac{x_i x_j}{r^3}\right) dx^i dx^j, \quad (4.4.38)$$

α é uma constante de integração e, em primeira ordem em $\frac{\alpha}{r}$, $\sqrt{g} = 1$. Calculando a equação das geodésicas, Einstein obteve a precessão por revolução

$$\Delta\phi = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 \underbrace{T^2}_{\text{período de revolução}} (1 - e^2)}, \quad (4.4.39)$$

que é equivalente ao resultado que calculamos usando

$$\frac{4\pi^2 a^2}{T^2} = \frac{GM}{a} \Leftrightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}. \quad (4.4.40)$$

Para demonstrar esta relação notamos que, para uma órbita elíptica,

$$r(\phi) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\sin(\phi-\phi_0)} \quad ; \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{j}{r^2} \Leftrightarrow \int r^2 d\phi = \int j dt \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{j}_{\sqrt{GMa(1-e^2)}} \underbrace{\Delta t}_T = a^2(1-e^2)^2 \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{d\phi}{(1+e\sin\phi)^2}}_{\frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}}}$$

$$\Leftrightarrow T = \frac{a(1-e^2)^{3/2}}{\sqrt{GM}} \times \frac{2\pi}{(1-e^2)^{3/2}} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \quad q.e.d.$$

Nota: No duplo binário pulsar descoberto em 2003, PSR J0737-3039, o avanço do periastro é 140000 maior do que o de Mercúrio e está em perfeito acordo com a R.G.

4.5 Geodésicas nulas e a deflexão de um raio de luz

No mesmo artigo de 18 de Novembro de 1915, Einstein dedicou apenas meia página a uma segunda descoberta: “Um raio de luz que passe junto ao Sol deve sofrer uma deflexão de 1.7” (em vez de 0”.85).” O último valor era o resultado que Einstein obtivera em anteriores versões da teoria, que coincide com o resultado que pode ser obtido em Mecânica Newtoniana (como veremos em baixo). Passamos agora a deduzir o resultado da Relatividade Geral, estudando geodésicas nulas na solução de Schwarzschild.

As equações para θ, t, ϕ são exactamente as mesmas que no caso temporal. A equação radial é, tal como anteriormente, derivada do Lagrangeano, mas agora tomamos $L = 0$, dado que $ds^2 = 0$. A equação radial fica então:

$$\boxed{(\dot{r})^2 = E^2 - V(r)\frac{j^2}{r^2}}. \quad (4.5.1)$$

Tal como no caso temporal definimos $u = \frac{1}{r}$ e calculamos a equação diferencial para $u = u(\phi)$:

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\frac{j}{r^2}} = -\frac{\dot{r}}{j}. \quad (4.5.2)$$

Logo obtemos a equação, de (4.5.1)

$$(u')^2 = \frac{E^2}{j^2} - u^2 + 2Mu^3, \quad (4.5.3)$$

ou, introduzindo o parâmetro de impacto, $d \equiv \frac{j}{E}$,

$$\boxed{u'^2 = \frac{1}{d^2} - u^2 + 2Mu^3}. \quad (4.5.4)$$

Para resolvermos esta equação tomamos uma expansão do tipo

$$u = u_0(\phi) + \overbrace{(2GM)u_1(\phi)}^{\text{dimensão } \frac{1}{L^2}} + \mathcal{O}((2GM)^2). \quad (4.5.5)$$

É suprimido em relação ao primeiro termo

por um factor de $\frac{r_S}{r_\odot} \simeq \frac{3}{7 \times 10^5} \simeq 10^{-6}$

A equação fica em 1ª ordem em $2GM$

$$u_0'^2 + 4GMu_1'u_0' = \frac{1}{d^2} - u_0^2 - 2u_0u_1'2GM + 2GMu_0^3. \quad (4.5.6)$$

Resolvemos esta equação separadamente para os termos com diferentes ordens em GM .

- Em ordem zero - $(GM)^0$ -, (4.5.6) fica:

$$u_0'^2 = \frac{1}{d^2} - u_0^2, \quad (4.5.7)$$

cuja solução é:

$$u_0(\phi) = \frac{1}{d} \sin(\phi - \phi_0) \quad \Rightarrow \quad r_0(\phi) = \frac{d}{\sin(\phi - \phi_0)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sin(\phi - \phi_0)r_0(\phi)} = d. \quad (4.5.8)$$

y , em coordenadas Cartesianas no plano

Esta solução é uma linha recta ($y = d$) que passa a uma distância d da origem - Fig. 4.2. Doravante tomamos $\phi_0 = 0$ (escolha do sistema de coordenadas).

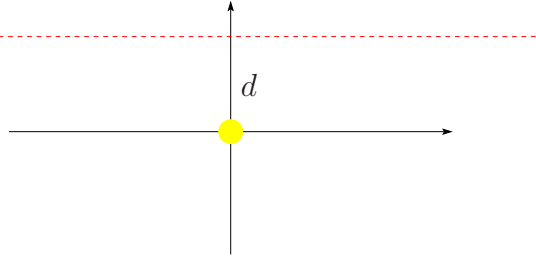


Figura 4.2: Solução da equação das geodésicas nulas em ordem zero: uma linha recta que passa a distância d do Sol (que se encontra na origem).

- Em primeira ordem - $(GM)^1$ -, (4.5.6) fica:

$$2u'_1 u'_0 = -2u_0 u_1 + u_0^3 ; \quad (4.5.9)$$

ou, usando a solução de ordem zero, $u_0 = \frac{\sin \phi}{d}$,

$$2u'_1 \frac{\cos \phi}{d} = -2u_1 \frac{\sin \phi}{d} + \frac{\sin^3 \phi}{d^3} . \quad (4.5.10)$$

Esta equação pode ser integrada após algumas manipulações. Dividindo por $\cos^2 \phi$, fica

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & \frac{2u'_1}{\cos \phi} + 2u_1 \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi} = \frac{\sin^3 \phi}{\cos^2 \phi d^2} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\frac{u_1}{\cos \phi} \right)' = \frac{1}{2d^2} \left(\frac{\sin \phi (1 - \cos^2 \phi)}{\cos^2 \phi} \right) , \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

ou ainda

$$\left(\frac{u_1}{\cos \phi} \right)' = \frac{1}{2d^2} \left(\frac{1}{\cos \phi} + \cos \phi \right)' , \quad (4.5.12)$$

de onde se vê que a solução é:

$$u_1 = \underbrace{a}_{\text{constante de integração}} \cos \phi + \frac{1}{2d^2} (1 + \cos^2 \phi) . \quad (4.5.13)$$

Concluimos pois que a solução de (4.5.6) em 2ª ordem é, portanto:

$$\boxed{u(\phi) = \frac{1}{d} \sin(\phi) + 2GM \left(a \cos \phi + \frac{1}{2d^2} (1 + \cos^2 \phi) \right) + \mathcal{O}((2GM)^2)} . \quad (4.5.14)$$

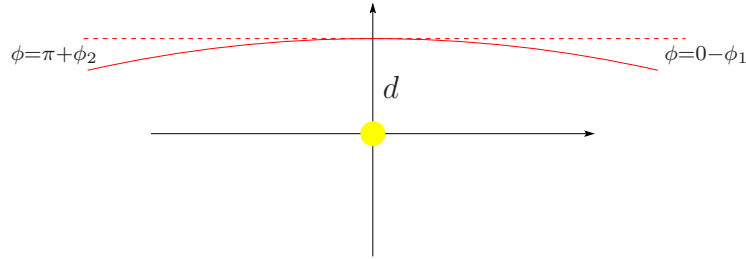


Figura 4.3: Solução da equação das geodésicas nulas em ordem um: uma linha curva que passa a distância d do Sol (que se encontra na origem), e faz, assintoticamente, dois pequenos ângulos ϕ_1 e ϕ_2 dois pequenos ângulos com a recta obtida em ordem zero.

Quando $r \rightarrow \infty, u \rightarrow 0$; logo

$$0 = \frac{\sin(\phi)}{d} + 2GM \left(a \cos \phi + \frac{1}{2d^2} (1 + \cos^2 \phi) \right) . \quad (4.5.15)$$

Em ordem zero a solução quando $r \rightarrow \infty$ seria $\phi \rightarrow 0, \pi$, cf. a recta desenhada na Fig. 4.2. Agora teremos um pequeno ângulo de desvio - Fig. 4.3.

A equação anterior avaliada em cada um deles é:

$$\begin{cases} \phi = -\phi_1 , & 0 = -\frac{\phi_1}{d} + 2GM \left(a + \frac{1}{2d^2} \times 2 \right) , \\ \phi = \pi + \phi_2 , & 0 = -\frac{\phi_2}{d} + 2GM \left(-a + \frac{1}{2d^2} \times 2 \right) . \end{cases}$$

Somando as duas equações fica

$$\frac{\phi_1 + \phi_2}{d} = \frac{4GM}{d^2} , \quad (4.5.16)$$

ou, para o desvio total, $\Delta\phi \equiv \phi_1 + \phi_2$, restaurando a velocidade da luz,

$$\boxed{\Delta\phi \equiv \phi_1 + \phi_2 = \frac{4GM}{c^2 d}} . \quad (4.5.17)$$

Usando, em unidades SI,

$$G = 6.673 \times 10^{-11} , \quad M = M_{\odot} = 1.983 \times 10^{30} , \quad d = R_{\odot} = 6.955 \times 10^8 , \quad c = 2.998 \times 10^8 ,$$

obtemos

$$\Delta\phi = 0.847 \times 10^{-5} \text{ rad} = (0.485 \times 10^{-3})^{\circ} = 0.0291' = 1.75'' . \quad (4.5.18)$$

Na teoria Newtoniana da gravitação também é possível derivar uma fórmula para a deflexão da luz num campo gravitacional de um corpo massivo como o Sol, assumindo que a teoria clássica se mantém válida à velocidade da luz e que os “raios” ou “partículas” de luz têm uma massa gravitacional igual à sua massa inercial. O primeiro cálculo quantitativo publicado da deflexão da luz por um corpo massivo foi feito por J. Soldner em 1801 (“*Ueber die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner geradlinigen Bewegung, durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbei geht*”, publicado em J.E. Bode, *Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1809*. Berlin p.161 ff.).

Para derivarmos o valor da deflexão na teoria Newtoniana reconsiderámos a equação de movimento da teoria Newtoniana, (4.4.15)

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2\varepsilon}{mj^2} + \frac{2GM}{j^2}u - u^2, \quad (4.5.19)$$

onde j é o momento angular por unidade de massa. Tal como anteriormente fazemos

$$u(\phi) = u_0 + V(\phi), \quad (4.5.20)$$

e escolhemos u_0 de modo a eliminar o termo linear em V . A equação fica:

$$(V')^2 = \left(\frac{2\varepsilon}{mj^2} + \frac{2GM}{j^2}u_0 - u_0^2\right) + V\left(\frac{2GM}{j^2} - 2u_0\right) - V^2. \quad (4.5.21)$$

Escolhemos $u_0 = \frac{GM}{j^2}$; logo:

$$\boxed{(V')^2 = \underbrace{\frac{2\varepsilon}{mj^2} + \left(\frac{GM}{j^2}\right)^2}_{A^2} - V^2}. \quad (4.5.22)$$

A solução é

$$V(\phi) = A \sin(\phi - \phi_0). \quad (4.5.23)$$

Logo

$$\boxed{r(\phi) = \frac{1}{\frac{GM}{j^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{j^2}\right)^2 + \frac{2\varepsilon}{mj^2}} \sin(\phi - \phi_0)}. \quad (4.5.24)$$

Em contraste com o caso relevante para as órbitas planetárias, em que procurávamos soluções elípticas, neste caso é uma hipérbole (ou parábola) que procuramos. Em concreto, queremos perceber qual o ângulo ϕ quando $r \rightarrow \infty$ (tomamos $\phi_0 = 0$). Usando a parameterização da Fig. 4.3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{GM}{j^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{j^2}\right)^2 + \frac{2\varepsilon}{mj^2}} \underbrace{\sin(0 - \phi_1)}_{\simeq -\phi_1} = 0, \\ \frac{GM}{j^2} + \sqrt{\left(\frac{GM}{j^2}\right)^2 + \frac{2\varepsilon}{mj^2}} \underbrace{\sin(\pi + \phi_2)}_{-\sin \phi_2 \simeq -\phi_2} = 0. \end{array} \right.$$

Logo

$$\phi_1 = \phi_2 \simeq \frac{\frac{GM}{j^2}}{\sqrt{\left(\frac{GM}{j^2}\right)^2 + \frac{2\varepsilon}{mj^2}}}. \quad (4.5.25)$$

Concluimos que a deflexão é total é:

$$\Delta\phi = \phi_1 + \phi_2 = \frac{\frac{2GM}{j^2}}{\sqrt{\frac{2\varepsilon}{mj^2} + \left(\frac{GM}{j^2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2\varepsilon j^2}{m(GM)^2}}}. \quad (4.5.26)$$

Para simplificar este resultado, notamos que $\frac{mj}{\sqrt{2m\varepsilon}} = d$, parâmetro de impacto, i.e. $\left(\frac{\text{momento angular total}}{\text{momento total}}\right)$. Logo

$$\frac{2\varepsilon j^2}{m(GM)^2} = \frac{2\varepsilon}{m} \frac{1}{(GM)^2} \frac{d^2(2m\varepsilon)}{m^2} = \left(\frac{2\varepsilon}{m}\right)^2 \frac{d^2}{(GM)^2}. \quad (4.5.27)$$

Notamos ainda que a energia total

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mc^2 = E_c + E_{potencial}. \quad (4.5.28)$$

Ou seja, a velocidade das partículas de luz irá variar ao longo da trajectória e será c apenas quando $E_p = 0$. Consequentemente,

$$\frac{2\varepsilon j^2}{m(GM)^2} = \frac{4d^2}{\left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2} = \left(\frac{2 \times \text{distância mínima}}{\text{raio de Schwarzschild}}\right) \gg 1. \quad (4.5.29)$$

Concluimos, finalmente, que o resultado (4.5.26) pode ser aproximado por

$$\Delta\phi \simeq \frac{2}{\sqrt{\frac{d^2}{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^2}}} = \frac{2GM}{dc^2}, \quad (4.5.30)$$

exactamente metade do valor relativista (4.5.17).

Nota histórica: A deflexão de um raio de luz pelo Sol é normalmente apontado como, historicamente, a segunda confirmação observacional da Relatividade Geral, mas foi, verdadeiramente, a primeira confirmação de uma previsão da teoria. Não foi apenas bem sucedida, foi um autêntico fenómeno. A sua confirmação experimental aconteceu apenas em 1919, apesar de a previsão teórica ser de Novembro de 1915, mas a primeira guerra mundial dificultava a organização da expedição para medir o efeito. Em Março de 1917 o astrónomo real britânico Sir Frank Watson Dyson chamou a atenção para a excelência da configuração das estrelas do eclipse de 29 de Maio de 1919 para medir a alegada deflexão. Formaram-se duas expedições inglesas, uma a Sobral no Brasil, chefiada por Andrew Crommelin do observatório de Greenwich e outra à ilha do Príncipe, no então português arquipélago de São Tomé e Príncipe, chefiada por Arthur Eddington de Cambridge. O seu objectivo era medir a deflexão da luz medida pela Relatividade Geral: 1.75" para um raio de luz tangente ao Sol. As observações teriam de ser feitas durante um eclipse total, altura em que seria possível ver estrelas muito próximas do Sol. Fotografias do campo de estrelas eram feitas durante o eclipse e comparadas com fotografias do mesmo campo de estrelas quando o Sol não estava presente, determinando-se o deslocamento angular de cada estrela. Em 6 de Novembro de 1919, numa reunião conjunta da Royal Society e da Royal Astronomical Society, Dyson, assistido por Crommelin e Eddington afirmou, sob o retrato de Newton, “*Após um estudo cuidadoso das placas estou preparado para afirmar que elas confirmam a previsão de Einstein*” (Subtil é o Senhor, pág. 374). Nesse dia Einstein, que já havia sido “beatificado” em 1905, foi ‘canonizado’! O anúncio dos resultados dos Eclipses de 1919, capturaram a atenção de um público ainda desgastado pela 1ª Guerra Mundial e fizeram de Einstein uma celebridade. Contudo Einstein estava tão convencido da correcção

da sua teoria pela sua elegância e consistência interna que se diz ter comentado que “*teria pena do Todo Poderoso se os resultados não tivessem concordado com a teoria!*”

Mas na verdade as observações de 1919 estavam cheias de possíveis erros sistemáticos e as expedições subsequentes pouco melhoraram este estado das coisas. Os resultados destas e outras expedições foram [7] (em termos da previsão da RG, $\Delta\phi/\Delta\phi_{RG}$):

Eclipse	Nº de estrelas	d (em R_{\odot})	$\Delta\phi/\Delta\phi_{RG}$	Re-análises
1919 (Sobral)	7	2	1.13 ± 0.07	1.0 a 1.3
1919 (Príncipe)	5	2	0.92 ± 0.17	
1922	92	2.1	0.98 ± 0.06	1.3 a 0.9
1922	145	2.1	1.04 ± 0.09	1.2
1922	14	2	0.7 ± 1.3	
1922	18	2	0.8 ± 1.2	
1929	17	1.5	1.28 ± 0.06	0.9 a 1.2
1936	25	2	1.55 ± 0.15	1.6 ± 0.2
1936	8	4	0.7 a 1.2	
1947	51	3.3	1.15 ± 0.15	1.0 a 1.4
1952	10	2.1	0.97 ± 0.06	0.82 a 0.09
1973	39	2	0.95 ± 0.11	

Muitos deste resultados estavam contaminados por fontes de erro que incluíam:

- mudanças de escala desconhecidas entre as fotos do campo de estrelas com e sem Sol;
- condições precárias associadas a mau tempo e locais exóticos onde as expedições aconteciam.

Por volta de 1960 o melhor que se podia dizer é que o valor seria certamente mais do que 0.83”, metade do valor de Einstein, o valor Newtoniano obtido por Soldner em 1801 e re-publicado por Lénard em 1921, um conhecido Nazi, para desacreditar “*a ciência judaica*” de Einstein. Para além disso o assunto não estava esclarecido e só depois de 1960 foi incontornavelmente confirmado.

4.6 O desvio para o vermelho gravitacional

O terceiro teste clássico da Relatividade Geral é o desvio para o vermelho gravitacional. Podemos derivar o efeito para um campo gravitacional esférico usando a métrica de Schwarzschild.

Consideremos dois relógios exactamente iguais, em $r = r_A$ e $r = r_B$, $r_A > r_B > 2M$, com $\theta_A = \theta_B$ e $\phi_A = \phi_B$, em coordenadas de Schwarzschild. O relógio B emite sinais de luz com intervalos $\Delta\tau_B$, que são recebidos pelo relógio A . Mas com que intervalo?

Recordemos a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.6.1)$$

Para dois acontecimentos que tomam lugar no mesmo r, θ, ϕ , como a emissão de dois raios de luz consecutivos em B , o elemento de intervalo é

$$ds = -\sqrt{1 - \frac{2M}{r_B}} dt. \quad (4.6.2)$$

O elemento de intervalo é, para o observador em B , o elemento de tempo próprio

$$ds = -d\tau_B = -\sqrt{1 - \frac{2M}{r_B}} dt \quad \Rightarrow \quad \Delta\tau_B = \sqrt{1 - \frac{2M}{r_B}} \Delta t. \quad (4.6.3)$$

Δt pode ser visto como o tempo próprio entre os dois eventos para o observador no infinito. Note-se que $\Delta t > \Delta\tau_B$, o que demonstra desde já que o tempo passa mais devagar à medida que o campo gravítico se torna mais forte. Para o observador que se encontra em A ,

$$\Delta\tau_A = \sqrt{1 - \frac{2M}{r_A}} \Delta t. \quad (4.6.4)$$

Como Δt é o mesmo em (4.6.3) e (4.6.4) obtemos

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2M}{r_A}}{1 - \frac{2M}{r_B}}}. \quad (4.6.5)$$

Como $r_A > r_B$, $\Delta\tau_A > \Delta\tau_B$: A observa a emissão dos dois raios de luz, i.e., recebe-os, com um intervalo de tempo próprio maior do que o intervalo entre a emissão (dos mesmos dois raios) medido por B .

Para um espaço tempo arbitrário o resultado generaliza-se facilmente

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_A)}{g_{00}(r_B)}}. \quad (4.6.6)$$

No limite Newtoniano $g_{00}(r) = -(1 + 2\phi(r))$, $\phi \ll 1$. Logo

$$\frac{\Delta\tau_A}{\Delta\tau_B} = \sqrt{\frac{1 + 2\phi(r_A)}{1 + 2\phi(r_B)}} \simeq 1 + \phi(r_A) - \phi(r_B). \quad (4.6.7)$$

Pensando agora na frequência de um sinal electromagnético

$$\nu \propto \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\frac{\nu_B - \nu_A}{\nu_A} \simeq \frac{\phi(r_A) - \phi(r_B)}{c^2}}. \quad (4.6.8)$$

Esta é a *fórmula do "redshift" gravitacional* em termos do potencial gravítico Newtoniano. Se o campo gravítico é aproximadamente constante com aceleração g , como na superfície da Terra, e $r_A - r_B = h$

$$\boxed{\frac{\nu_B - \nu_A}{\nu_A} \simeq \frac{gh}{c^2}}. \quad (4.6.9)$$

Esta fórmula foi derivada por Einstein em 1911, usando os princípios da relatividade restrita e conservação de energia (cf. capítulo 2). Pode também ser derivada usando o princípio da equivalência e relatividade restrita. Para experiências feitas à superfície da Terra, o efeito é extremamente pequeno. Foi medido pela primeira vez em 1960, na famosa experiência de Pound e Rebka, refinada por Pound e Snider (1964,65) que verificou o efeito com erro inferior a 1%. A experiência original foi realizada no Jefferson Laboratory na Universidade de Harvard, usando uma torre com 22.6 m de altura, o que pela fórmula do redshift dá

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq 2.46 \times 10^{-15}. \quad (4.6.10)$$

Era por isso necessário conhecer a frequência da radiação com uma precisão extra-ordinária! O que tornou a experiência possível foi que 2 anos antes (1958) Rudolf Mössbauer descobrira o efeito que tem o seu nome - efeito de Mössbauer (Nobel 1961) que consiste no seguinte:

- Núcleos atômicos excitados decaem para o estado fundamental emitindo um fóton;

- A energia do fóton é a diferença de energia dos níveis nucleares menos a energia perdida por recuo do átomo emissor;
- Se a energia perdida for pequena então o fóton pode ser absorvido por um segundo núcleo do mesmo tipo;
- Esta emissão/absorção dizem-se ressonantes.

Mössbauer observou emissão/absorção em átomos em sólidos e explicou-a. O efeito Mössbauer criava emissão ressonante. Mas o “redshift” gravitacional alterava a frequência evitando a absorção ressonante. Pound e Rebka dava uma pequena velocidade ao emissor de modo a que o efeito Doppler compensasse o redshift e existisse absorção. Quando isso acontecia, sabendo a velocidade sabiam o redshift.

Bibliografia

- [1] Hans Stephani, *Relativity: An introduction to Special and General Relativity*, Third Edition, Cambridge University Press, 2004.
- [2] http://galileoandeinstein.physics.virginia.edu/more_stuff/flashlets/mmexpt6.htm
- [3] http://en.wikipedia.org/wiki/Michelson-Morley_experiment
- [4] <http://fisica.fe.up.pt/luz/michelson.html>
- [5] Albert Abraham Michelson, Edward Morley, *On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether*, American Journal of Science, 1887, **34** (203): 333-345.
- [6] Bernard Schutz, *Gravity from the ground up: An introductory guide to gravity and general relativity*, First edition, Cambridge University Press, 2003.
- [7] Clifford M. Will *Theory and experiment in gravitational physics*, Cambridge University Press, 1993.