

Notas de Mecânica e Campo Electromagnético

Carlos A. R. Herdeiro



Departamento de Física
Universidade de Aveiro

v2.0 2012/2013

1	Fundamentos de Mecânica Clássica	2
1.1	Cinemática da partícula	2
1.1.1	Posição e trajectória	2
1.1.2	Deslocamento e distância percorrida	3
1.1.3	Velocidade média e instantânea	4
1.1.4	Aceleração média e instantânea	4
1.1.5	Movimento rectilíneo e uniforme ou uniformemente variado	5
1.1.6	Queda livre	6
1.1.7	Sistema de versores tangencial/normal	6
1.1.8	Coordenadas polares e cilíndricas	8
1.2	Dinâmica da partícula	10
1.2.1	Leis de Newton	10
1.2.2	Forças de contacto	12
1.2.3	Forças à distância	19
1.3	Trabalho e Energia	20
1.3.1	Trabalho de uma força constante e variável	20
1.3.2	Energia cinética e o teorema do trabalho-energia	22
1.3.3	Potência	23

1.3.4	Forças conservativas e forças não conservativas	23
1.3.5	Energia potencial	25
1.3.6	Conservação de energia	27
1.4	Dinâmica de um sistema de partículas	28
1.4.1	Conservação do momento linear de um sistema isolado	28
1.4.2	Centro de massa	29
1.4.3	Colisões	30
1.4.4	Cinemática e dinâmica de rotação	30
1.4.5	Energia cinética e o momento de inércia	31
1.4.6	Momento de uma força	32
1.4.7	Dinâmica de rotação	33
1.4.8	Condições de equilíbrio estático	35
2	Sistemas oscilatórios	37
2.1	Oscilador harmónico simples	37
2.2	Oscilador harmónico amortecido	39
2.3	Oscilador harmónico forçado: ressonância	40
2.4	Oscilações acopladas	42
2.4.1	Dois pêndulos acoplados por uma mola	42
2.4.2	Caso geral: método matricial	49
3	Campo eléctrico e magnético	53
3.1	Lei de Coulomb	53
3.2	Campo eléctrico e a lei de Gauss	55
3.3	Energia potencial eléctrica e potencial eléctrico	59
3.3.1	Energia potencial e potencial eléctrico para cargas pontuais	60
3.3.2	Potencial eléctrico numa distribuição contínua de cargas	61
3.4	Capacidade e condensadores	62
3.4.1	Condutores carregados	62
3.4.2	Capacidade de condutores carregados	62

3.4.3	Associação de condensadores	64
3.4.4	Energia armazenada num condutor/condensador	66
3.4.5	Dipolo eléctrico e materiais dieléctricos	68
3.5	Corrente eléctrica e resistência	72
3.5.1	Intensidade de corrente eléctrica	72
3.5.2	Resistência e Lei de Ohm	73
3.5.3	Condutividade e resistividade	73
3.5.4	Associação de resistências	75
3.5.5	Força electromotriz	77
3.5.6	Leis de Kirchhoff	78
3.6	Campo magnético	78
3.6.1	A lei de Biot-Savart e a força de Lorentz	79
3.6.2	A lei de Ampère	81
3.7	Indução electromagnética	82
3.7.1	A lei de Faraday	83
3.7.2	Auto-indutância e circuito RLC	84
3.7.3	Indutância mútua	87

CAPÍTULO 1

Fundamentos de Mecânica Clássica

Nota: nestes apontamentos os vectores estão representados a negrito.

1.1 Cinemática da partícula

A *cinemática* consiste na descrição do movimento de um corpo sem se preocupar com as causas desse movimento. Como simplificação, idealizamos o corpo como uma partícula pontual. Nesta descrição a extensão do corpo, bem como possíveis movimentos a ela associados - como rotações ou deformações - é ignorada.

1.1.1 Posição e trajectória

Para estabelecermos a posição de uma partícula é necessário considerar um sistema de coordenadas. O *sistema de coordenadas Cartesianas* é o mais simples dos sistemas coordenados, pois os versores em cada direcção são independentes do ponto do espaço considerado. Em três dimensões espaciais, denotamos as coordenadas Cartesianas por $\{x, y, z\}$ e os versores respectivos por $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ - Fig. 1.1.

A primeira quantidade cinemática fundamental é o *vector posição*, \mathbf{r} , de uma partícula

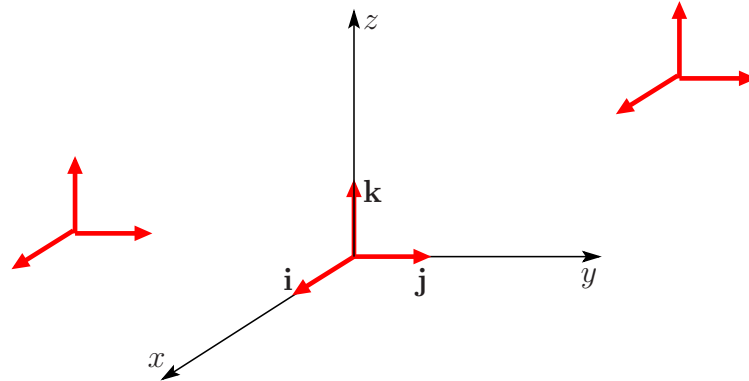


Figura 1.1: Um sistema de coordenadas Cartesianas $\{x, y, z\}$ e os versores respectivos $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Em qualquer ponto do espaço os versores são os mesmos (isto é paralelos).

pontual; num certo sistema Cartesiano, é dada por, num instante de tempo t ,

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} .$$

A *magnitude* do vector posição, no instante t , é:

$$|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2} .$$

A *trajectória* de uma partícula é o lugar geométrico dos pontos ocupados pela partícula ao longo do tempo.

1.1.2 Deslocamento e distância percorrida

O *deslocamento* da partícula é a variação da sua posição. Seja \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_f) o vector de posição inicial (final) da partícula; o deslocamento é:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i .$$

O deslocamento é uma quantidade vectorial, se bem que, por vezes, se denomine por deslocamento a quantidade escalar $|\Delta\mathbf{r}|$.

A *distância percorrida*, Δs , é a distância total que a partícula percorreu. Seja $d\mathbf{r}$ um deslocamento infinitesimal. A distância percorrida pode ser escrita como

$$\Delta s = \int_{\text{trajectoria}} |d\mathbf{r}| , \quad (1.1.1)$$

onde o integral é tomado ao longo de toda a trajectória desde \mathbf{r}_i até \mathbf{r}_f .

Em geral o deslocamento e distância percorrida são diferentes. Mas para um movimento rectilíneo em que não há alteração do sentido do movimento, $\Delta s = |\Delta \mathbf{r}|$.

1.1.3 Velocidade média e instantânea

Consideremos um deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ de uma partícula efectuado num intervalo de tempo Δt . A *velocidade média* é:

$$\mathbf{v}_{\text{media}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}.$$

Para uma partícula cuja posição é $\mathbf{r}(t)$, a *velocidade instantânea* ou simplesmente *velocidade* é

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}. \quad (1.1.2)$$

O vector velocidade é sempre tangente à trajectória; esta é a segunda quantidade cinemática fundamental, que indica a razão da variação no tempo do vector posição.

Num sistema de coordenadas Cartesianas

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt} \mathbf{k} \equiv v_x(t) \mathbf{i} + v_y(t) \mathbf{j} + v_z(t) \mathbf{k}.$$

A magnitude do vector velocidade, no instante t , é:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}.$$

1.1.4 Aceleração média e instantânea

É necessário introduzir ainda uma terceira quantidade cinemática fundamental que nos indica a razão da variação no tempo da velocidade.

Consideremos um deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ de uma partícula efectuado num intervalo de tempo Δt . Inicialmente a velocidade era \mathbf{v}_i e no final a velocidade era \mathbf{v}_f . Seja a variação da velocidade denotada $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$.

Definimos a *aceleração média* por:

$$\mathbf{a}_{\text{media}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Definimos a *aceleração instantânea* ou simplesmente *aceleração* por

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} . \quad (1.1.3)$$

Num sistema de coordenadas Cartesianas

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\mathbf{k} = \frac{dv_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\mathbf{k} \equiv a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k} .$$

A magnitude do vector aceleração, no instante t , é:

$$|\mathbf{a}(t)| = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2 + a_z(t)^2} .$$

1.1.5 Movimento rectilíneo e uniforme ou uniformemente variado

Consideremos um movimento rectilíneo. Se escolhermos o eixo xx alinhado com a direcção do movimento, necessitamos apenas da coordenada x para descrever toda a cinemática. O movimento é *1-dimensional*.

Se a velocidade é constante também em magnitude (para além da direcção), a aceleração é nula. De (1.1.2) obtemos a lei do movimento rectilíneo e uniforme:

$$v_x = \text{constante} = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = \int v_x dt = v_x t + x_0 , \quad (1.1.4)$$

onde x_0 é uma constante de integração - a posição em $t = 0$.

Se a aceleração é constante então de (1.1.3):

$$a_x = \text{constante} = \frac{dv_x(t)}{dt} \Rightarrow v_x(t) = \int a_x dt = a_x t + v_{x0} , \quad (1.1.5)$$

onde v_{x0} é uma constante de integração - a velocidade em $t = 0$. Logo,

$$x(t) = \int v_x(t) dt = \int (a_x t + v_{x0}) dt = \frac{a_x t^2}{2} + v_{x0} t + x_0 . \quad (1.1.6)$$

Estas são as leis do movimento rectilíneo e uniformemente retardado/acelerado.

Resolvendo (1.1.5) em ordem a t e substituindo em (1.1.6) obtemos a relação:

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) . \quad (1.1.7)$$

Veremos mais tarde que esta é uma forma do teorema trabalho-energia.

1.1.6 Queda livre

Um exemplo simples e relevante que combina um movimento rectilíneo e uniforme numa direcção com um movimento uniformemente variado noutra direcção é o movimento de queda livre na vizinhança da superfície da Terra. Nestas considerações consideramos apenas a força gravítica da Terra que origina uma aceleração vertical, dirigida para a Terra, e com magnitude de 9.8 m/s^2 . Este vector aceleração é denotado por \mathbf{g} e a sua magnitude por $|\mathbf{g}| = g$.

Consideremos a direcção x como sendo a horizontal; nesta direcção o movimento é uniforme. Consideremos a direcção y como sendo a vertical, dirigida para ‘cima’; nesta direcção o movimento é uniformemente variado com aceleração $-g$.

Logo as leis do movimento para a queda livre são:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -9.8 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} v_x = v_{x0} = \text{constante} \\ v_y = -9.8t + v_{y0} \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} x = v_{x0}t + x_0 \\ y = -4.9t^2 + v_{y0}t + y_0 \end{array} \right. . \quad (1.1.8)$$

Nestas leis, o vector velocidade inicial $\mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ é por vezes especificado não pelas suas componentes Cartesianas, mas pela sua magnitude v_0 e pelo ângulo θ que faz com o eixo xx :

$$\mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta) .$$

1.1.7 Sistema de versores tangencial/normal

Como já foi referido, o vector velocidade é sempre tangente à trajectória. Para compreender as componentes tangente e normal à trajectória do vector aceleração não é conveniente usar a base vectorial Cartesiana $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, que já foi apresentada. É conveniente usar uma base vectorial *adaptada à trajectória*.

Consideremos um espaço 2-dimensional e uma certa trajectória. Consideremos ainda a base vectorial dada pelo versor tangente \mathbf{u}_t a essa trajectória e o versor normal a este, \mathbf{u}_n , que aponta no sentido da concavidade da trajectória - Fig. 1.2.

A posição da partícula ao longo da trajectória é descrita por uma função $s(t)$, que é a distância medida ao longo da trajectória a partir de uma origem estabelecida na trajectória.

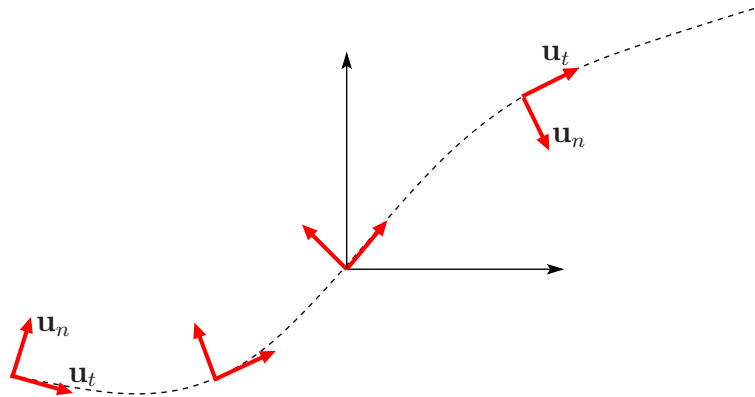


Figura 1.2: Uma trajetória - a tracejado - e o sistema de vetores \mathbf{u}_t , \mathbf{u}_n adaptado a essa trajetória. Está também representado um referencial Cartesiano.

O vector velocidade da partícula pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds(t)}{dt} \mathbf{u}_t = v(t) \mathbf{u}_t . \quad (1.1.9)$$

A aceleração será dada por (1.1.3):

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \mathbf{u}_t + v(t) \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} . \quad (1.1.10)$$

Ao contrário dos vetores Cartesianos, o versor \mathbf{u}_t varia de ponto para ponto e por isso temos de calcular a sua derivada temporal (isto é, em diferentes instantes a partícula está em diferentes pontos onde o versor é diferente). Demonstra-se que

$$\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \frac{v(t)}{\rho(t)} \mathbf{u}_n , \quad (1.1.11)$$

onde ρ é o *raio de curvatura da trajetória* no ponto onde a partícula se encontra no instante t . Logo,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv(t)}{dt} \mathbf{u}_t + \frac{v(t)^2}{\rho(t)} \mathbf{u}_n \equiv a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n ,$$

de onde obtemos as expressões para a *aceleração tangencial* a_t e *aceleração normal* a_n :

$$a_t = \frac{dv(t)}{dt} , \quad a_n = \frac{v(t)^2}{\rho(t)} . \quad (1.1.12)$$

A aceleração tangencial mede a variação da magnitude da velocidade a que a curva está a ser percorrida, $v(t)$, com o tempo; a aceleração normal mede a razão a que a direcção da

trajectória varia com o tempo. A aceleração total é

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (1.1.13)$$

O raio da trajectória é um factor geométrico e depende apenas do lugar geométrico da trajectória (e não da maneira como ela é percorrida pela partícula). Para uma curva no plano dada por $y = y(x)$ demonstra-se que:

$$\rho = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}. \quad (1.1.14)$$

1.1.8 Coordenadas polares e cilíndricas

O sistema de coordenadas Cartesiano caracteriza-se pelo facto de as linhas em que apenas uma das coordenadas varia (denominadas *linhas integrais*) serem rectas. Chama-se por isso um *sistema rectilíneo de coordenadas*. Genericamente, um sistema de coordenadas será *curvilíneo*, dado que as linhas integrais de algumas coordenadas serão curvas. Vamos agora introduzir um sistema curvilíneo e apresentar as expressões para o vector posição, velocidade e aceleração neste sistema.

As *coordenadas polares* $\{r, \theta\}$, são um sistema de coordenadas 2-dimensional definidas do seguinte modo. Em primeiro lugar estabelecemos uma origem do sistema coordenado O . A posição de um ponto P no plano é determinada pela distância do ponto à origem, r , e pelo ângulo, θ , que o vector posição desse ponto (relativamente à origem) faz com uma direcção estabelecida. Tipicamente esta direcção é tomada como sendo o eixo xx de um referencial Cartesiano - Fig. 1.3.

O vector posição em coordenadas polares é

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r. \quad (1.1.15)$$

O vector velocidade é, como tal,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}.$$

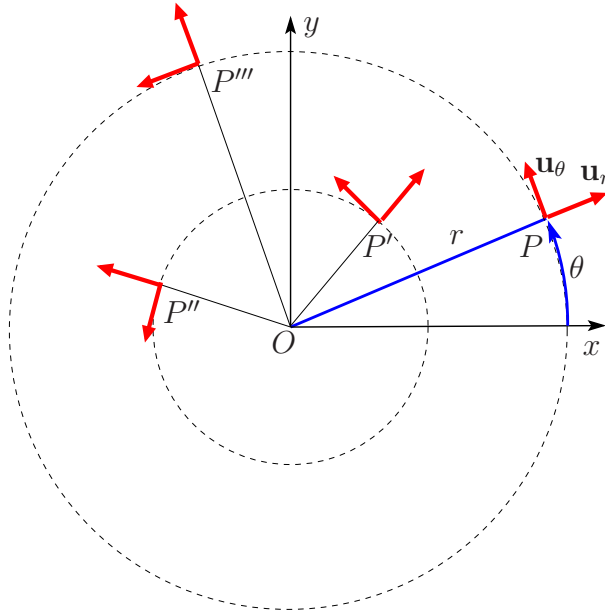


Figura 1.3: Coordenadas polares r, θ de um ponto P . É representado o referencial Cartesiano cujo eixo xx define a linha com $\theta = 0$. Os versores polares são representados em P, P', P'' e P''' . O versor \mathbf{u}_r é sempre radial; o versor \mathbf{u}_θ num ponto é sempre tangente à circunferência de raio r que passa nesse ponto e com o sentido em que θ cresce.

Demonstra-se que

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta, \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_r. \quad (1.1.16)$$

Logo

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta. \quad (1.1.17)$$

Esta expressão é bastante intuitiva. A componente radial da velocidade é apenas a derivada da componente radial da posição, dado que a coordenada radial é uma coordenada rectilínea. A componente angular da velocidade é $r\omega$ onde $\omega \equiv d\theta/dt$, que é a relação habitual entre velocidade linear e angular num movimento circular.

O vector aceleração é:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt},$$

ou, usando (1.1.16)

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{u}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \mathbf{u}_\theta. \quad (1.1.18)$$

Observe-se, em particular, que num *movimento circular e uniforme* em que $r = \text{constante}$ e $\omega = \text{constante}$,

$$\mathbf{a} = -r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{u}_r = -r\omega^2 \mathbf{u}_r = -\frac{v^2}{r} \mathbf{u}_r ,$$

onde $v = \omega r$ é a velocidade linear total para este movimento. Esta é a expressão para a *aceleração centrípeta*, que já foi vista em (1.1.12).

As *coordenadas cilíndricas* $\{r, \theta, z\}$, são um sistema de coordenadas 3-dimensional definidas adicionando às coordenadas polares uma direcção Cartesiana z . As expressões para a posição, velocidade e aceleração em coordenadas cilíndricas obtêm-se trivialmente das coordenadas polares adicionando a componente z a cada uma delas:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{k} ; \quad (1.1.19)$$

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} ; \quad (1.1.20)$$

$$\mathbf{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \mathbf{u}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} . \quad (1.1.21)$$

1.2 Dinâmica da partícula

A *dinâmica* consiste na relação entre o movimento, descrito pela cinemática, e as suas causas. Historicamente, desde Aristóteles, vigorou o conceito que o movimento de um corpo é causado pelas *forças* que nele actuam. Em particular considerava-se que “para mover um corpo é necessário aplicar uma força”. Contudo, o trabalho de Galileu e Newton mostrou que o problema é um pouco mais subtil, essencialmente porque para descrever o movimento é necessário escolher um referencial e há referenciais em movimento relativo que não são distinguíveis, no sentido em que as leis da dinâmica são exactamente as mesmas. A perspectiva tornou-se - que é aquela hoje aceite - que “para um objecto mudar o seu estado de movimento é necessário aplicar força”. A relação entre forças e movimento é descrita pelas *leis de Newton*.

1.2.1 Leis de Newton

As leis fundamentais da dinâmica ou leis de Newton são três:

- Primeira lei de Newton ou Lei da inércia: Uma partícula livre (isto é actuada por uma força resultante nula) move-se com vector velocidade \mathbf{v} constante.

Esta lei é válida numa classe de referências ditas *inerciais*. De um modo simples, um referencial inercial é um referencial onde as leis da dinâmica tomam a sua forma mais simples. Isto é, não há forças fictícias, introduzidas pelo próprio movimento do referencial. Se \mathcal{O} é um referencial inercial, então qualquer referencial em movimento rectilíneo e uniforme relativamente a \mathcal{O} é também um referencial inercial. Mas um referencial que descreve um movimento de rotação com velocidade angular não nula relativamente a \mathcal{O} não é um referencial inercial.

- Segunda lei de Newton ou Lei fundamental: Uma partícula actuada por uma força resultante \mathbf{F} (não nula) varia a sua *quantidade de movimento* $\mathbf{p} \equiv m\mathbf{v}$, onde m é a *massa inercial* da partícula, de acordo com a lei

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} . \quad (1.2.1)$$

Se a partícula tem massa constante, esta lei pode ser reescrita como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} . \quad (1.2.2)$$

A massa inercial é a propriedade da partícula que mede a sua resistência a mudar o seu estado de movimento, isto é a sua *inércia*.

Esta lei explica porque é que na cinemática só temos de considerar os vectores posição, velocidade e aceleração e não derivadas de ordem superior da posição: a aceleração é determinada pelas forças que actuam na partícula através da lei fundamental da dinâmica.

- Terceira lei de Newton ou Lei dos pares acção-reacção: Se numa partícula denotada ‘1’ existe uma força devida a outra partícula, denotada ‘2’, \mathbf{F}_{12} , então existe sobre a partícula ‘2’ uma força devida à partícula ‘1’, \mathbf{F}_{21} , que tem a mesma magnitude da primeira, igual direcção e sentido oposto:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} . \quad (1.2.3)$$

A estas duas forças chama-se *par acção-reacção*. Note-se que as forças deste par actuam sempre em corpos diferentes.

Seguidamente iremos considerar as leis da dinâmica para alguns exemplos de forças. Dividimos as forças em dois tipos: forças de contacto e forças que actuam sem contacto (à distância). Nestas considerações existe uma força que aparece frequentemente: o *peso* de um corpo. O peso é a força gravítica da Terra (ou eventualmente de outro corpo massivo) que actua num corpo devido a este ter uma massa gravitacional m . Na vizinhança da superfície da Terra o peso é:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g} , \quad (1.2.4)$$

onde \mathbf{g} é a aceleração gravítica introduzida na secção 1.1.6.

1.2.2 Forças de contacto

Forças de contacto são forças que só existem mediante um contacto (macroscópico) entre o corpo que exerce a força e o corpo que é actuado pela força.

Reacção normal

Um corpo que está pousado na superfície da Terra é actuado pela força gravítica da Terra, isto é por \mathbf{P} . Como a aceleração do corpo é nula (relativamente á Terra) a força total que nele actua tem de ser nula. Logo tem de existir uma força, que é exercida pela superfície onde o corpo está pousado, que compensa a força gravítica. Esta força (de contacto) denomina-se *reacção normal* ou *normal*. A reacção normal, denotada por \mathbf{N} , é uma força com: a mesma direcção; a mesma magnitude; e com sentido oposto ao da projecção do peso na normal à superfície onde o corpo está pousado - Fig. 1.4. Assim, se o corpo estiver pousado num plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal, a normal terá magnitude:

$$|\mathbf{N}| = |\mathbf{P}| \cos \theta = mg \cos \theta . \quad (1.2.5)$$

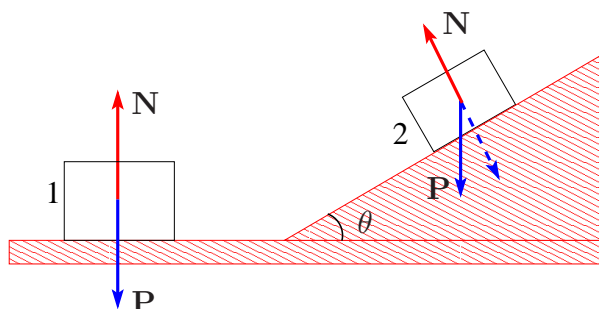


Figura 1.4: O bloco 1 está pousado numa superfície horizontal. A reacção normal tem a mesma magnitude do peso e sentido oposto. O bloco 2 está pousado num plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal. A reacção normal tem a magnitude da componente do peso ortogonal à superfície do plano inclinado que é dada por (1.2.5); esta componente está representada pela linha tracejada. Note-se que o corpo no plano inclinado só estará em equilíbrio se houver uma outra força que compense a componente do peso na direcção paralela ao plano inclinado.

Tensão

Uma situação comum que consideraremos é a de um corpo suspenso por um ou mais fios. Nesses casos, o corpo é actuado por uma força devida ao fio. Assumiremos em muitos problemas que: i) este fio tem uma massa desprezável, de modo a podermos negligenciar na dinâmica do sistema a força gravitacional sobre o fio; ii) o fio é inextensível, de modo a podermos considerar o seu comprimento como sendo fixo e a negligenciar uma possível força elástica adicional do fio. Deste modo a acção do fio sobre o corpo resume-se a uma força, denominada *tensão*, \mathbf{T} , que tem a direcção do fio e é aplicada no ponto de contacto entre o fio e o corpo - Fig. 1.5. Em geral esta força é calculada por considerações sobre o equilíbrio estático ou pela dinâmica do sistema.

Como exemplo consideremos o corpo 1 da Fig. 1.5. Como se encontra em equilíbrio a sua aceleração é nula, e aplicando a segunda lei de Newton obtemos:

$$\mathbf{T} + \mathbf{P} = 0 \Rightarrow |\mathbf{T}| = mg .$$

Por outro lado, aplicando a segunda lei de Newton ao corpo 2 da mesma figura, que não se encontra em equilíbrio, temos que:

$$\mathbf{T} + \mathbf{P} = m\mathbf{a} ,$$

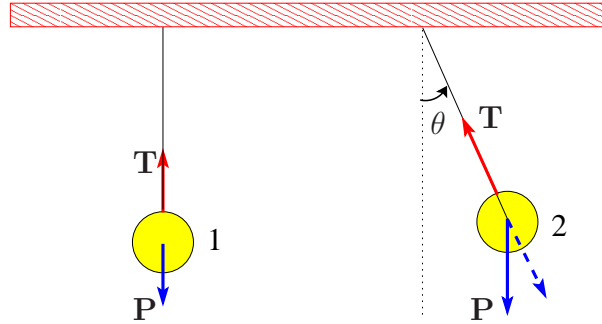


Figura 1.5: Dois corpos suspenso por um fio. O corpo 1 encontra-se em equilíbrio. O corpo 2, no caso de apenas o peso e a tensão actuarem nele, não se encontra em equilíbrio.

onde m é a massa do corpo. Este é um exemplo onde é útil usar a base vectorial normal/tangencial discutida na secção 1.1.7. Notamos que o movimento do corpo irá descrever um arco de circunferência e portanto terá um raio constante e igual ao comprimento do fio - que denotamos por L -; projectando a equação anterior nas componentes tangencial e normal (consideramos o sentido positivo para a aceleração tangencial o sentido em que θ aumenta) obtemos:

$$-P \sin \theta = ma_t, \quad T - P \cos \theta = ma_n .$$

Usando (1.1.12) e notando que a velocidade linear $v(t) = L\omega(t) = Ld\theta(t)/dt$ obtemos

$$-g \sin \theta = L \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad T = P \cos \theta + m \frac{v^2}{L} .$$

A segunda equação permite-nos obter o valor da tensão. Para $\theta = 0$, recuperamos o valor obtida no estudo do corpo 1 da Fig. 1.5 se $v = 0$. Se $v \neq 0$, a tensão aumenta, como é intuitivo. A primeira equação é a lei diferencial da dinâmica de um pêndulo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0 . \quad (1.2.6)$$

Para pequenas oscilações (Nota: $\sin(30^\circ) = 0.5$, $\sin(10^\circ) \simeq 0.17$) tomamos $\sin \theta \simeq \theta$. A equação anterior fica:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0 . \quad (1.2.7)$$

Esta é uma equação diferencial ordinária (significa que só depende de uma variável), linear (em θ) e de segunda ordem (pois a derivada de ordem mais elevada é a segunda derivada).

A sua solução é lei da dinâmica de um pêndulo (para pequenas oscilações)

$$\theta(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t + \phi_0 \right) . \quad (1.2.8)$$

Aqui, A é a *amplitude* e ϕ_0 é a *fase inicial*. São ambas constantes de integração. Este é um exemplo de *movimento harmónico simples*.

Força elástica

Consideremos uma mola. A mola tem um comprimento de equilíbrio. Se a mola for alongada relativamente a esse comprimento de equilíbrio ela sofre uma força que tende a fazer a mola contrair. Se ela for contraída relativamente ao comprimento de equilíbrio ela sofre uma força que tende a alonga-la. Em ambos os casos a força é *restauradora*, isto é tenta levar a mola novamente para o comprimento de equilíbrio. Esta força é denominada *elástica* e é dada pela *Lei de Hooke*:

$$\mathbf{F}_e = -k\Delta\mathbf{x} , \quad (1.2.9)$$

onde $\Delta\mathbf{x}$ é a variação do vector posição da (extremidade da) mola relativamente à posição de equilíbrio; o sinal ‘menos’ indica que a força é restauradora e k é denominada *constante da mola*. Note-se que as unidades S.I. de k são N/m .

É frequente considerar que a posição de equilíbrio é a origem do referencial e que o eixo xx está alinhado com a força. Nesse caso a lei de Hooke escreve-se $F_e = -kx$. Considerando que uma massa m sofre a força elástica da mola e usando a segunda lei de Newton:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx ,$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 .$$

Esta é a lei diferencial da dinâmica de um corpo actuado por uma mola. Note-se que esta é uma equação idêntica a (1.2.7). A sua solução é:

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_0 \right) . \quad (1.2.10)$$

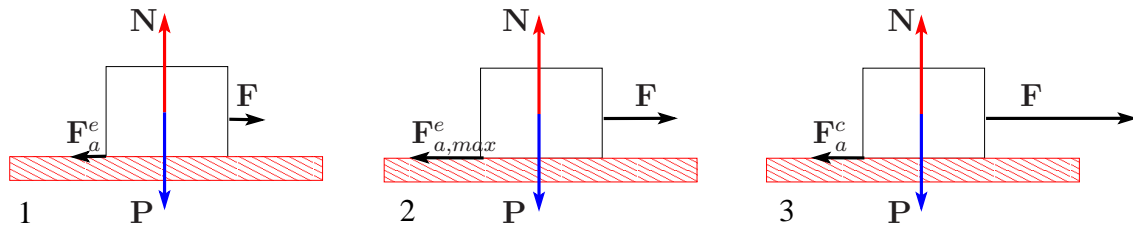


Figura 1.6: Representação da força de atrito sobre um corpo actuado por uma força \mathbf{F} em três situações distintas.

Esta é a lei da dinâmica de um corpo actuado por uma mola. Também aqui, A é a *amplitude* e ϕ_0 é a *fase inicial*, sendo ambas constantes de integração. Este é um outro exemplo de *movimento harmónico simples*.

Força de atrito sólido

Quando dois materiais sólidos entram em contacto existe uma força que tende a impedir o movimento relativo das duas superfícies de contacto. Esta força denomina-se *força de atrito* (sólido), \mathbf{F}_a .

Consideremos a seguinte situação. Sobre um corpo com peso \mathbf{P} é exercida uma força \mathbf{F} , horizontal, conforme a Fig. 1.6. Para uma força \mathbf{F} pequena - Fig. 1.6, situação 1 -, o corpo não se move, como é fácil de concluir fazendo a experiência. Logo a força de atrito tem igual direcção, igual magnitude e sentido oposto a \mathbf{F} . Este tipo de força de atrito, que actua quando o corpo está em repouso, denomina-se *força de atrito estático*, \mathbf{F}_a^e .

À medida que aumentamos a magnitude de \mathbf{F} , a força de atrito estático atinge o máximo valor que pode ter para aquele sistema - Fig. 1.6, situação 2. A força de atrito estático máxima é denotada $\mathbf{F}_{a,max}^e$; quando é atingida, o sistema encontra-se no limiar de começar o movimento.

Aumentando ainda mais a magnitude de \mathbf{F} o corpo começa a mover-se - Fig. 1.6, situação 3. A força de atrito que actua sobre o corpo em movimento é menor do que a força de atrito estático máxima: é denominada *força de atrito cinético*, \mathbf{F}_a^c . Este facto está de acordo com a percepção que é mais fácil manter um corpo em movimento (com velocidade constante) do que iniciar o seu movimento.

A magnitude da força de atrito estático máxima é proporcional à magnitude da reacção normal que actua sobre o corpo e a um coeficiente denominado *coeficiente de atrito estático*, μ_e :

$$|\mathbf{F}_{a,max}^e| = \mu_e |\mathbf{N}| . \quad (1.2.11)$$

Analogamente, a magnitude da força de atrito cinético é proporcional à magnitude da reacção normal que actua sobre o corpo e a um coeficiente denominado *coeficiente de atrito cinético*, μ_c :

$$|\mathbf{F}_a^c| = \mu_c |\mathbf{N}| . \quad (1.2.12)$$

A direcção da força de atrito é sempre a direcção da força que está a tentar movimentar ou a imprimir movimento ao corpo e o sentido é o contrário a essa força.

Os coeficientes de atrito μ_e e μ_c dependem dos materiais em contacto. Por exemplo:

Materiais em contacto	μ_e	μ_c
Aço sobre Aço	0.74	0.57
Gelo sobre Aço	0.1	0.03

Como avançado anteriormente, verifica-se sempre que:

$$\mu_e > \mu_c .$$

Impulsão

Um corpo em repouso, imerso ou parcialmente imerso num fluido (líquido ou gás), está sujeito, para além do seu peso, à força de *impulsão*, \mathbf{I} . Esta força tem a mesma direcção e sentido contrário ao peso. A sua magnitude é igual ao peso do volume de fluido deslocado - *princípio de Arquimedes*. O volume de fluido deslocado é, por definição, o volume do corpo que está imerso, V_{im} . Se o fluido tem densidade ρ_{fl} , a força de impulsão é:

$$\mathbf{I} = -\rho_{fl} V_{im} \mathbf{g} . \quad (1.2.13)$$

Qual é a condição para um corpo poder flutuar? Se o corpo flutua, a impulsão compensa o peso. Pela segunda lei de Newton, denotando a densidade do corpo por ρ_{corpo} e o seu volume por V_{corpo} :

$$\mathbf{I} + \mathbf{P} = 0 \Rightarrow |\mathbf{I}| = |\mathbf{P}| \Rightarrow \rho_{fl} V_{im} g = \rho_{corpo} V_{corpo} g ;$$

logo

$$\frac{V_{im}}{V_{corpo}} = \frac{\rho_{corpo}}{\rho_{fl}} . \quad (1.2.14)$$

O volume imerso é necessariamente menor (no limite igual) ao volume do corpo; logo o lado esquerdo é menor do que 1. Como tal o lado direito também terá de ser menor (no limite igual) a 1:

$$\rho_{corpo} \leq \rho_{fluido} . \quad (1.2.15)$$

Esta é a condição para o corpo poder flutuar.

Força de atrito viscoso

Quando um corpo se desloca no interior de um fluido fica sujeito a uma força adicional, para além da impulsão, que se opõe ao movimento e que aumenta com a velocidade com que o corpo se desloca. Esta força resulta da *viscosidade do fluido* e denomina-se por isso *força de atrito viscoso*, \mathbf{F}_a^v . Para pequenas velocidades a lei (fenomenológica) para esta força é:

$$\mathbf{F}_a^v = -b\mathbf{v} , \quad (1.2.16)$$

onde b é uma constante dependente do corpo e do fluido cujas unidades no S.I. são $N \cdot s/m$. Para o caso de uma esfera de raio R , verifica-se empiricamente que

$$b = 6\pi\eta R ,$$

onde η é o *coeficiente de viscosidade do fluido*, cujas unidades no S.I. são $Pa \cdot s$ (Pa significa ‘Pascal’, a unidade S.I. de pressão).

Um corpo de massa m , com densidade superior à de um fluido (de modo a não flutuar), largado no fluido, terá uma dinâmica dada pela segunda lei de Newton:

$$\mathbf{P} + \mathbf{I} + \mathbf{F}_a^v = m\mathbf{a} .$$

Se for largado do repouso, a força dominante será inicialmente o peso. À medida que a velocidade cresce, no entanto, a força de atrito cresce e a determinada altura fará com que

$$\mathbf{P} + \mathbf{I} + \mathbf{F}_a^v = 0 .$$

A partir desta altura o corpo entra no *regime de velocidade constante ou limite*, v_L . A determinação desta velocidade permite determinar o coeficiente de viscosidade do fluido. De facto, se o corpo é uma esfera de raio R , a última equação pode ser escrita:

$$\rho_{corpo} \frac{4\pi R^3}{3} g = \rho_{fl} \frac{4\pi R^3}{3} g + 6\pi\eta R v_L ,$$

de onde se conclui que

$$\eta = \frac{2gR^2}{9v_L} (\rho_{corpo} - \rho_{fl}) . \quad (1.2.17)$$

Todas as quantidades do lado direito desta equação podem ser medidas experimentalmente, o que determina o coeficiente de viscosidade do fluido.

1.2.3 Forças à distância

Nem todas as forças necessitam que haja contacto entre os corpos envolvidos. Há forças que actuam à distância. O exemplo mais óbvio, que experimentamos a todos os instantes da nossa vida, é o da *força gravítica*.

A *Lei da gravitação universal de Newton* afirma que a força gravítica entre dois corpos:

- é sempre atractiva e dirigida ao longo da linha que une os dois corpos;
- é proporcional ao produto das massas, M_1 e M_2 , dos corpos;
- é inversamente proporcional ao quadrado da distância, r , entre eles:

$$|\mathbf{F}_G| = G \frac{M_1 M_2}{r^2} . \quad (1.2.18)$$

A constante de proporcionalidade, G , é a constante da gravitação universal e tem valor

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} .$$

Para tornar mais intuitiva a natureza de “acção à distância” da força gravítica foi introduzido o conceito de *campo gravítico*. O campo gravítico é a *força por unidade de*

massa (*teste*) produzida por uma massa (*fonte*). É portanto um campo de acelerações produzida por uma massa; por exemplo, pelo planeta Terra.

Considerando que a massa M é colocada na origem de um sistema de coordenadas, o campo gravítico num ponto com vector posição \mathbf{r} é dado por (seja $r = |\mathbf{r}|$):

$$\mathbf{g} = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{u}_r , \quad (1.2.19)$$

onde $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$ é o versor na direcção do vector posição desse ponto - Fig. 1.7. Tomando M como sendo a massa da Terra e r como sendo o raio da Terra:

$$M_{Terra} = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg} , \quad R_{Terra} = 6.4 \times 10^3 \text{ km} ,$$

obtemos que o campo gravítico da Terra na vizinhança da superfície da Terra é

$$|\mathbf{g}| = G \frac{M_T}{R_T^2} \simeq 9.8 \text{ m/s}^2 . \quad (1.2.20)$$

Note-se que este valor varia com a altitude; note-se ainda que devido à rotação da Terra, à forma oblata da Terra e à não uniformidade da crosta Terrestre, este valor sofre ligeiras variações ao longo da superfície terrestre.

1.3 Trabalho e Energia

A dinâmica de um corpo pode ser entendida em termos do conceito de força, como discutido na secção 1.2. Mas pode igualmente ser entendida em termos do conceito de *energia*; mais concretamente, em termos de transferências entre diferentes tipos de energias. Ao contrário da força, que é uma quantidade vectorial, a energia é uma quantidade escalar. Por isso, frequentemente, a compreensão da dinâmica em termos de energia é mais simples do que em termos de força.

A ligação entre os conceitos de força e energia é feita através do conceito de *trabalho*, que passamos a estudar.

1.3.1 Trabalho de uma força constante e variável

O trabalho W realizado por uma força constante \mathbf{F} durante um deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ é

$$W(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = |\mathbf{F}| |\Delta \mathbf{r}| \cos \theta , \quad (1.3.1)$$

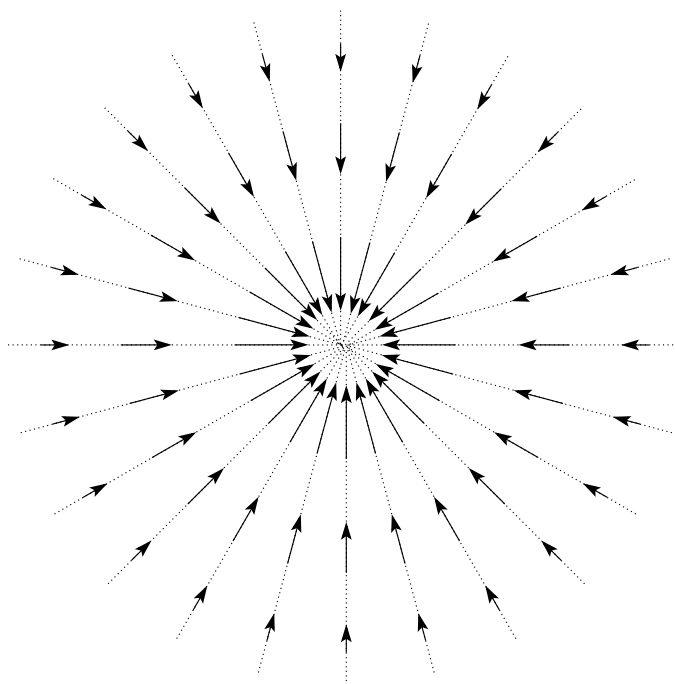


Figura 1.7: Representação do campo gravítico de uma massa pontual.

onde o ‘ponto’ denota o produto escalar entre vectores e θ é o ângulo entre a força e o deslocamento. Em componentes, numa base Cartesiana, podemos escrever

$$W(\mathbf{F}) = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z . \quad (1.3.2)$$

Da eq. (1.3.1) deduzimos imediatamente que uma força não nula realiza trabalho nulo se e apenas se o deslocamento for nulo ou se o deslocamento for perpendicular à força.

O trabalho tem as mesmas dimensões físicas de uma energia:

$$[W] = \frac{\text{Massa} \times \text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} ; \quad (1.3.3)$$

a unidade de trabalho no Sistema Internacional de unidades é o *Joule*.

Quando temos várias forças aplicadas, o trabalho da força resultante é igual à soma dos trabalhos de todas as forças. De facto:

$$W(\mathbf{F}_{\text{resultante}}) = \left(\sum_i \mathbf{F}_i \right) \cdot \Delta \mathbf{r} \stackrel{\text{propriedade distributiva}}{=} \left(\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r} \right) = \sum_i W(\mathbf{F}_i) . \quad (1.3.4)$$

O trabalho é positivo (negativo) se a força auxiliar (contrariar) o deslocamento efectuado; nulo se a força não contribuir para o deslocamento efectuado.

Se a força \mathbf{F} não for constante (isto é, se varia ao longo da trajectória da partícula), então o trabalho da força é dado por

$$W(\mathbf{F}) = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} , \quad (1.3.5)$$

onde o integral é designado por *integral de caminho*, e é calculado ao longo da trajectória da partícula, que terá de ser indicada, iniciando-se no ponto com vector posição \mathbf{r}_i e terminando no ponto com vector posição \mathbf{r}_f . Num referencial Cartesiano, em que $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $\mathbf{r}_f = (x_f, y_f, z_f)$, temos

$$W(\mathbf{F}) = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x, y, z)dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y(x, y, z)dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z(x, y, z)dz , \quad (1.3.6)$$

onde a equação da trajectória deve ser usada para expressar $y = y(x)$ e $z = z(x)$ no primeiro integral, $x = x(y)$ e $z = z(y)$ no segundo integral e $x = x(z)$ e $y = y(z)$ no terceiro integral.

1.3.2 Energia cinética e o teorema do trabalho-energia

Consideremos uma partícula cuja dinâmica é devida a uma força resultante $\mathbf{F}_{resultante}$. Esta força exerce trabalho sobre a partícula. Este trabalho é uma energia que está a ser transferida para a (ou retirada da) partícula. Que energia é esta, do ponto de vista da partícula?

Para responder a esta questão consideramos o trabalho da força resultante e aplicamos a segunda lei de Newton:

$$W(\mathbf{F}_{resultante}) = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \stackrel{2^a \text{ lei de Newton}}{=} \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt ;$$

note que, em rigor, na mudança de variável de integração da posição para o tempo, os limites de integração devem referir-se ao instante de tempo em que a partícula se encontra em \mathbf{r}_i e em \mathbf{r}_f . Da equação anterior resulta que:

$$W(\mathbf{F}_{resultante}) = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dt = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{\mathbf{r}_f} - \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{\mathbf{r}_i} .$$

Definindo a *energia cinética da partícula* como

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad (1.3.7)$$

obtemos que o *trabalho da força resultante que actua na partícula é igual à variação da energia cinética da partícula*:

$$W(\mathbf{F}_{resultante}) = \Delta E_c. \quad (1.3.8)$$

Este é o teorema do trabalho-energia.

1.3.3 Potência

O trabalho realizado por um força corresponde a uma energia (cinética) que é transmitida ou retirada à partícula. A taxa temporal a que esse trabalho está a ser realizado denomina-se por *potência da força*. Se num intervalo de tempo Δt o trabalho realizado é ΔW , a *potência média* da força é

$$P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (1.3.9)$$

A *potência instantânea* ou simplesmente *potência*, é:

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (1.3.10)$$

Como o elemento de trabalho é $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, a potência instantânea transmitida a uma partícula com velocidade \mathbf{v} , que é actuada por uma força \mathbf{F} , é dada por

$$P = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.3.11)$$

A unidade S.I. de potência é o *Watt*, W , que é igual a um Joule por segundo.

1.3.4 Forças conservativas e forças não conservativas

Consideremos uma partícula que se desloca entre um ponto A e um outro ponto B - Fig. 1.8. Ao longo da trajectória seguida pela partícula, existe uma força que actua sobre ela, realizando trabalho sobre a partícula. Se este trabalho for independente da trajectória seguida entre A e B, a força é dita *conservativa*; se este trabalho for dependente

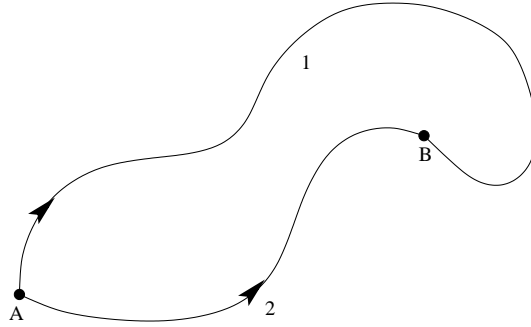


Figura 1.8: Dois caminhos, 1 e 2, entre os pontos A e B.

da trajectória seguida entre A e B, a força é dita *não conservativa*. Consideremos um exemplo de cada um destes tipos de força.

Uma força cuja direcção, sentido e magnitude sejam constantes no espaço é conservativa. Consideremos um sistema de coordenadas Cartesianas tal que a força está anti-alinhada com o eixo dos yy : $\mathbf{F} = -|\mathbf{F}|\mathbf{j}$. Logo,

$$W(\mathbf{F}) = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -|\mathbf{F}| \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = -|\mathbf{F}| \int_{y_i}^{y_f} dy = -|\mathbf{F}|(y_f - y_i) \equiv -|\mathbf{F}|\Delta y .$$

Fixando os pontos inicial e final, o deslocamento vertical Δy , será o mesmo para todas as trajectórias. Logo, esta força, que pode ser imaginada como sendo o peso, é conservativa - Fig. 1.9, painel esquerdo.

Uma força cuja magnitude $|\mathbf{F}|$ seja constante e cuja direcção seja a da velocidade, mas com sentido oposto, $\mathbf{F} = -|\mathbf{F}|\mathbf{u}_t$, não é conservativa. De facto,

$$W(\mathbf{F}) = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -|\mathbf{F}| \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{u}_t \cdot d\mathbf{r} = -|\mathbf{F}| \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} |d\mathbf{r}| = -|\mathbf{F}|\Delta s ,$$

onde na penúltima igualdade usamos $\mathbf{u}_t \cdot d\mathbf{r} = |d\mathbf{r}|$, dado que \mathbf{u}_t é um versor paralelo a $d\mathbf{r}$, e na última igualdade obtivemos a distância percorrida, Δs usando (1.1.1). Como a distância percorrida é diferente para diferentes caminhos, esta força, que pode ser imaginada como sendo o atrito, é não conservativa - Fig. 1.9, painel direito.

Uma consequência imediata da definição de força conservativa é que o trabalho de uma força conservativa ao longo de uma trajectória fechada é nulo.

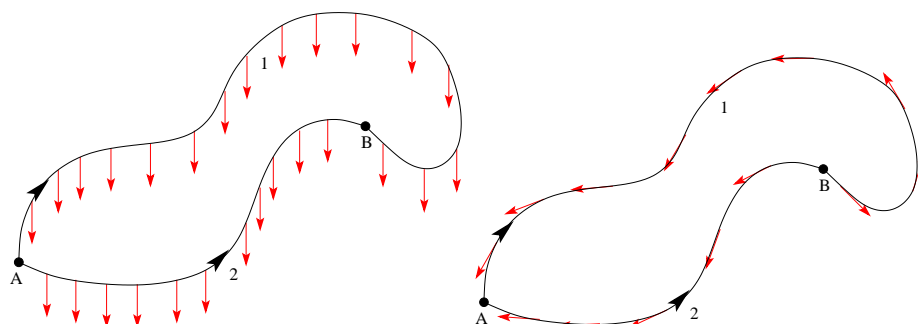


Figura 1.9: Dois tipos de força aplicada aos dois caminhos da Fig. 1.8. (Painel da esquerda): exemplo de uma força conservativa (poderia ser o peso) - a força tem sempre a mesma magnitude, direcção e sentido em todos os pontos. (Painel da direita): exemplo de uma força não conservativa (poderia ser o atrito) - a força tem sempre a mesma magnitude, mas a direcção varia, sendo sempre a mesma da velocidade mas com sentido oposto.

1.3.5 Energia potencial

Por definição, o trabalho realizado por uma força conservativa é apenas função dos pontos inicial e final da trajectória. Este facto sugere a existência de uma função escalar, que denominamos por *energia potencial*, E_p , tal que o seu conhecimento nos pontos inicial e final da trajectória é suficiente para calcular o trabalho

$$W(\mathbf{F}) = \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = E_p(\mathbf{r}_i) - E_p(\mathbf{r}_f) = -\Delta E_p . \quad (1.3.12)$$

Para um movimento em 1-dimensão (que fazemos coincidir com o eixo xx), esta relação fica

$$\int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx = E_p(x_i) - E_p(x_f) ,$$

o que requer que

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} . \quad (1.3.13)$$

Esta relação informa-nos que a força tem o sinal contrário ao do declive da curva $E_p = E_p(x)$; ou seja, a força aponta sempre no sentido descendente da curva. Os extremos da curva são pontos onde a força se anula - *pontos de equilíbrio*. Os mínimos da curva são pontos de equilíbrio *estável*; os máximos são pontos de equilíbrio *instável* - Fig. 1.10.

No caso geral 3-dimensional, a equação (1.3.12) requer que

$$\mathbf{F} = -\nabla E_p(\mathbf{r}) , \quad (1.3.14)$$

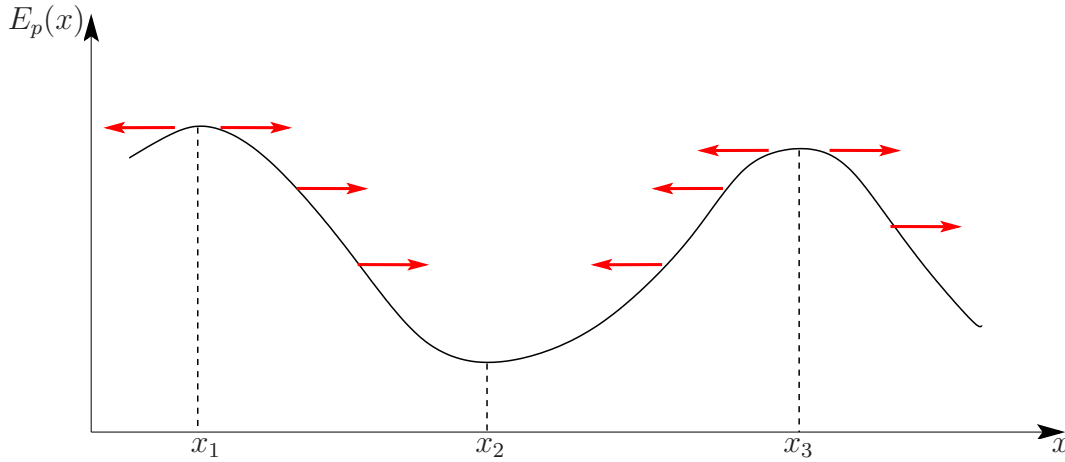


Figura 1.10: Energia potencial de um sistema 1-dimensional. As setas indicam o sentido da força em vários pontos x . A força aponta sempre no sentido descendente da curva. Os pontos x_1 e x_3 são pontos de equilíbrio instável; o ponto x_2 é de equilíbrio estável.

onde introduzimos o operador *gradiente*, representado por ‘ ∇ ’ (lê-se ‘nabla’); este é um operador diferencial vectorial, que em coordenadas Cartesianas tem componentes

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) . \quad (1.3.15)$$

Como exemplos, calculemos a energia potencial associada a duas forças conservativas: ao peso e à força elástica.

Energia potencial gravítica (campo gravítico uniforme)

O peso, ou força gravítica, na vizinhança da superfície da Terra, é dado por (1.2.4). Usando (1.3.12), num referencial Cartesiano em que $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$,

$$-\Delta E_p = W(\mathbf{P}) = m \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = -mg \int_{y_i}^{y_f} dy = -mg\Delta y .$$

Logo,

$$\Delta E_p = mg\Delta y .$$

Apenas as variações de energia potencial têm significado físico. Por isso, a energia potencial absoluta é sempre definida a menos de uma constante. Deste modo, tomamos para a *energia potencial gravítica*, E_p^g , (perto da superfície da Terra),

$$E_p^g = mgy , \quad (1.3.16)$$

onde y é a altura contada a partir de qualquer ponto de referência.

Energia potencial elástica

A força elástica é dada por (1.2.9). Assumimos que esta força actua em 1-dimensão. Usando (1.3.12) num referencial Cartesiano em que $\mathbf{F}_e = -k\Delta\mathbf{x} = -k(x - x_{eq})\mathbf{i}$, em que x_{eq} denota a posição de equilíbrio,

$$-\Delta E_p = W(\mathbf{F}_e) = -k \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \Delta\mathbf{x} \cdot d\mathbf{r} = -k \int_{x_i}^{x_f} (x - x_{eq}) dx = -\frac{1}{2}k(x_f - x_{eq})^2 + \frac{1}{2}k(x_i - x_{eq})^2.$$

Deste modo, tomamos para a *energia potencial elástica*, E_p^e ,

$$E_p^e = \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2. \quad (1.3.17)$$

1.3.6 Conservação de energia

Consideremos uma partícula que é actuada por uma força resultante que é a soma de um conjunto de forças conservativas \mathbf{F}_c^i e de forças não conservativas \mathbf{F}_{nc}^j :

$$\mathbf{F}_{resultante} = \sum_i \mathbf{F}_c^i + \sum_j \mathbf{F}_{nc}^j. \quad (1.3.18)$$

Do teorema do trabalho-energia (1.3.8) obtemos

$$W\left(\sum_i \mathbf{F}_c^i + \sum_j \mathbf{F}_{nc}^j\right) \stackrel{(1.3.4)}{=} \sum_i W(\mathbf{F}_c^i) + \sum_j W(\mathbf{F}_{nc}^j) = \Delta E_c. \quad (1.3.19)$$

Seja E_p^i a energia potencial associada à força conservativa \mathbf{F}_c^i . Da relação anterior juntamente com (1.3.12) obtemos que

$$\sum_j W(\mathbf{F}_{nc}^j) = \Delta E_c + \sum_i \Delta E_p^i = \Delta \left(E_c + \sum_i E_p^i \right) = \Delta E_M, \quad (1.3.20)$$

onde definimos a *energia mecânica*, E_M , como a soma da energia cinética com todas as energias potenciais:

$$E_M \equiv E_c + \sum_i E_p^i. \quad (1.3.21)$$

A relação (1.3.20) informa-nos sobre o balanço energético do sistema. Se não há forças não conservativas a actuar no sistema, então:

$$\Delta E_M = 0 \Rightarrow E_M = \text{constante} , \quad (1.3.22)$$

ou seja a energia mecânica é conservada e toda a dinâmica do sistema pode ser entendida em termos de transferências de energia entre energia cinética e energias potenciais. Se há forças não conservativas a actuar no sistema, então a a variação de energia mecânica é igual ao trabalho das forças não conservativas que actuam no sistema.

1.4 Dinâmica de um sistema de partículas

Até agora considerámos a dinâmica de uma partícula pontual. Consideraremos de seguida a dinâmica de um sistema de partículas que poderá ser discreto (isto é, um conjunto de partículas pontuais), ou contínuo. Neste último caso ignoraremos as deformações do corpo; isto é, consideraremos o corpo como *rígido*.

1.4.1 Conservação do momento linear de um sistema isolado

Começamos por considerar um *sistema isolado*, que definimos como um sistema onde não há forças exteriores aplicadas; isto é, todas as forças resultam das interacções entre as partes do sistema. Por simplicidade consideramos apenas duas partículas, denotadas ‘1’ e ‘2’ e cujos momentos lineares são \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 , respectivamente. Seja \mathbf{F}_{12} a força sobre a partícula 1, devida à partícula 2; seja \mathbf{F}_{21} a força sobre a partícula 2, devida à partícula 1. Pela terceira lei de Newton

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 .$$

Por outro lado, pela segunda lei de Newton,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} , \quad \mathbf{F}_{21} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} ;$$

Logo,

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{P} = 0 ,$$

onde definimos o *momento linear total do sistema* $\mathbf{P} \equiv \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. Ou seja, o momento linear total do sistema é conservado para um sistema isolado. O resultado é facilmente generalizável para um sistema de N partículas, cada uma com momento linear \mathbf{p}_i , para o qual o momento linear total do sistema é

$$\mathbf{P} \equiv \sum_i \mathbf{p}_i . \quad (1.4.23)$$

1.4.2 Centro de massa

No caso de o sistema não ser isolado, sendo actuado por uma força externa, \mathbf{F}_{ext} , o seu momento linear total não é conservado. Como varia \mathbf{P} ?

A variação de \mathbf{P} torna-se intuitiva se introduzirmos o conceito de *centro de massa*. Por definição, o vector posição do centro de massa de uma distribuição discreta de massas m_i , cada uma com vector posição \mathbf{r}_i , é dado por

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i , \quad (1.4.24)$$

onde

$$M = \sum_i m_i ,$$

é a massa total do sistema. Para uma distribuição contínua

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm . \quad (1.4.25)$$

A velocidade do centro de massa é

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d\mathbf{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{p}_i = \frac{\mathbf{P}}{M} . \quad (1.4.26)$$

Logo,

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{CM} . \quad (1.4.27)$$

Ou seja, o momento linear total de um sistema de partículas é igual ao de uma partícula com a massa total do sistema movendo-se com a velocidade do centro de massa.

A aceleração do centro de massa é

$$\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \frac{1}{M} \sum_i \mathbf{F}_i = \frac{\mathbf{F}_{ext}}{M}, \quad (1.4.28)$$

onde na última igualdade usámos o facto que as forças internas do sistema se anulam no somatório, pela terceira lei de Newton. Logo,

$$\mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{CM} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (1.4.29)$$

Ou seja, o centro de massa move-se, sob a acção de forças externas, como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto.

1.4.3 Colisões

Na ausência de forças externas, o estudo de colisões num sistema de partículas é feito usando a conservação do momento linear total do sistema.

Para além disso a energia poderá ou não ser conservada. Definimos

- *Colisões elásticas*, como sendo colisões que conservam tanto o momento linear total do sistema como a energia cinética.
- *Colisões inelásticas*, como sendo colisões que conservam o momento linear total do sistema mas não conservam a energia cinética.

Um caso extremo das colisões inelásticas, denominado por *colisões perfeitamente inelásticas*, ocorre quando os objectos se deslocam juntos após a colisão.

1.4.4 Cinemática e dinâmica de rotação

Vamos agora considerar um sistema de partículas cujas distâncias relativas permanecem fixas, de modo a que o sistema mantenha a sua forma. Esta idealização de um corpo denomina-se por *corpo rígido*. Na realidade todos os corpos sólidos são *elásticos* e não rígidos, sendo deformáveis quando submetidos a pressões ou tensões suficientemente intensas. Para descrever a dinâmica de uma distribuição contínua de matéria realista, um

corpo elástico, tem que se considerar a teoria da *elasticidade*. Esse estudo cai fora do âmbito deste curso e, como tal, consideraremos apenas a aproximação do corpo rígido para distribuições contínuas de matéria (sólida).

A dinâmica do corpo rígido consiste na dinâmica de translação do corpo, descrita pelo movimento do centro de massa, mais a dinâmica de rotação do corpo. Consideraremos aqui o caso simples em que a rotação existe em torno de um único eixo.

1.4.5 Energia cinética e o momento de inércia

Consideremos um corpo rígido que se encontra em rotação em torno de um eixo com uma velocidade angular ω . Um elemento de massa m_i tem uma magnitude de velocidade linear, devida à rotação, $v_i = \omega r_i$, onde r_i é a distância do elemento de massa ao eixo de rotação. A energia cinética do corpo é a soma da energia cinética de todos os elementos de massa:

$$E_c = \sum_i E_c(m_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2 ,$$

onde definimos o *momento de inércia* do corpo, relativamente a este eixo de rotação, como

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 . \quad (1.4.30)$$

Se em vez de uma distribuição discreta de massas tivéssemos uma distribuição contínua de massas, o momento de inércia seria dado por

$$I = \int r^2 dm = \int_{\text{volume}} r^2 \rho(r) dV , \quad (1.4.31)$$

onde r é a distância do ponto considerado ao eixo de rotação, $\rho(r)$ é a densidade de massa nesse ponto e dV é o elemento de volume.

Observe-se que as expressões para a energia cinética associada à translação e à rotação

$$E_c^{\text{trans}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \longleftrightarrow \quad E_c^{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 ,$$

são mapeadas traduzindo a massa inercial pelo momento de inércia

$$m \quad \longleftrightarrow \quad I ,$$

e a velocidade linear pela velocidade angular

$$v \longleftrightarrow \omega .$$

É frequente que o momento de inércia de um corpo tenha de ser calculado relativamente a diferentes eixos paralelos sobre os quais o corpo pode rodar. É então útil considerar o *teorema dos eixos paralelos* ou *teorema de Steiner*:

“Se um corpo de massa M tem um momento de inércia I_{CM} relativamente a um eixo que passa pelo centro de massa, então o mesmo corpo terá um momento de inércia dado por

$$I = I_{CM} + Md^2 , \quad (1.4.32)$$

relativamente a um outro eixo, paralelo ao primeiro, que se encontra à distância d do primeiro.”

1.4.6 Momento de uma força

É intuitivo que para alterar um movimento de rotação é relevante não só a força aplicada, mas também, onde é aplicada e a direcção em que é aplicada. Por exemplo, para abrir ou fechar uma porta, aplicando a mesma força perto da dobradiça ou no puxador obtêm-se resultados manifestamente diferentes.

A quantidade que desempenha o papel fundamental na dinâmica de rotação é o *momento da força* ou *torque* $\boldsymbol{\tau}$. O momento de uma força \mathbf{F} , aplicada num ponto P relativamente a um ponto O , é definido por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} , \quad (1.4.33)$$

onde \mathbf{r} é o vector posição de P relativamente a O e ‘ \times ’, representa o produto vectorial entre os dois vectores. A magnitude de $\boldsymbol{\tau}$ é

$$\tau = |\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \sin \theta ,$$

onde θ é o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{F} . O torque é a quantidade que na dinâmica de rotação desempenha o mesmo papel que a força desempenha na dinâmica de translação:

$$\mathbf{F} \longleftrightarrow \boldsymbol{\tau} .$$

O torque total sobre um sistema é simplesmente a adição vectorial de todos os torques que actuam sobre o sistema.

1.4.7 Dinâmica de rotação

Como é que o torque aplicado a um corpo rígido determina a sua dinâmica?

A resposta a esta questão é sugerida considerando um caso simples, de uma partícula de massa m que se encontra condicionada a um movimento 2-dimensional, circular, com raio r , e que está sujeita a uma força \mathbf{F} . Como a partícula tem apenas a liberdade de alterar a sua velocidade angular, e não a sua trajectória, temos apenas de considerar a projecção tangencial das equações do movimento (note que se estivessemos a tratar de um corpo rígido a rodar - ex. um disco -, a componente normal da força iria alterar o movimento de translação e não o de rotação):

$$F_t = ma_t .$$

O torque da força relativamente ao centro do movimento tem magnitude

$$\tau = r|\mathbf{F}| \sin \theta = rF_t = rma_t = rm \frac{dv}{dt} = r^2 m \frac{d\omega}{dt} \equiv mr^2 \alpha , \quad (1.4.34)$$

onde introduzimos a *aceleração angular* α , que é a derivada temporal da velocidade angular,

$$\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} , \quad (1.4.35)$$

e que se relaciona com a aceleração linear (tangencial), para um movimento circular, por $a = r\alpha$, de acordo com (1.1.18). A aceleração angular é a quantidade análoga, na dinâmica de rotação, à aceleração linear na dinâmica de translação

$$a \longleftrightarrow \alpha .$$

A equação (1.4.34) informa-nos que um torque origina uma aceleração angular, que é inversamente proporcional ao momento de inércia. Apesar de ter sido sugerida num caso simples, a mesma expressão é válida para um sólido em rotação rígida em torno de um eixo. Esta é claramente a relação análoga na dinâmica de rotação, à segunda lei de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad \tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} .$$

Contudo, a forma fundamental da segunda lei de Newton é $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Qual a forma análoga na dinâmica de rotação.

Para respondermos à questão anterior introduzimos o conceito de *momento angular* \mathbf{L} , de uma partícula com momento linear \mathbf{p} , relativamente a um ponto O ,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} , \quad (1.4.36)$$

onde \mathbf{r} é o vector posição da partícula relativamente a O . Derivando o momento angular relativamente ao tempo:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} .$$

O primeiro termo é nulo, dado que $\mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$; para o segundo termo, usando a segunda lei de Newton:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau} .$$

Esta é a lei fundamental da dinâmica de rotação que também é válida para a variação do momento angular de um sólido rígido actuado por um torque. Claramente:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} .$$

É também manifesto desta equação que o momento linear \mathbf{p} e o momento angular \mathbf{L} são as quantidades análogas na dinâmica de translação e rotação. Para tornar este mapeamento ainda mais manifesto recuperamos novamente o corpo rígido considerado no início da secção 1.4.5 e tomamos o eixo de rotação como o eixo dos zz . O elemento de massa m_i tem uma componente segundo z do vector momento angular, relativamente a um ponto (arbitrário) no eixo de rotação,

$$L_z(m_i) = m_i v_i r_i = m_i \omega r_i^2 ;$$

logo a componente do momento angular segundo z de todo o corpo rígido é:

$$L_z = \sum_i L_z(m_i) = \sum_i m_i \omega r_i^2 = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega = I \omega . \quad (1.4.37)$$

Note que se o corpo for simétrico, relativamente ao eixo de rotação, o momento angular total terá apenas componente segundo z ; mas esta afirmação não é verdadeira para um corpo arbitrário.

Podemos introduzir o *vector velocidade angular*, $\boldsymbol{\omega}$, definido como um vector ortogonal ao plano de rotação, com o sentido dado pela regra da mão direita e com a magnitude da velocidade angular. Por exemplo, no caso que estamos a considerar $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$. Ou seja, ω é a componente z do vector velocidade angular. Denotando ω por ω_z , obtemos então as relações análogas

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad \longleftrightarrow \quad L_z = I\omega_z .$$

Não podemos escrever, com mais generalidade, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$? Não. Para rotações genéricas (combinação de rotações em torno de vários eixos) uma teoria mais genérica tem de ser considerada, em que, em particular, o momento de inércia de um corpo rígido não é apenas um escalar, mas sim um tensor, denominado *tensor de inércia*. Um tal estudo está fora do âmbito deste curso.

1.4.8 Condições de equilíbrio estático

Em que condições um corpo sólido rígido poderá ser encontrado em equilíbrio estático? Claramente não é suficiente impôr que a força resultante no corpo é nula, como acontecia para o caso da partícula pontual. Um contra-exemplo é um corpo que é actuado por duas forças de igual magnitude e igual direcção, mas de sentidos opostos, que actuam em diferentes pontos do corpo - um *binário*. Um tal sistema origina um movimento de rotação do corpo. Para este movimento de rotação não acontecer, verificamos dos resultados da secção anterior que é necessário requerer também que o torque resultante no corpo seja nulo, relativamente a qualquer ponto.

Assim, as condições de equilíbrio estático de um corpo actuado por um conjunto de

forças \mathbf{F}_i e por um conjunto de torques τ_j são:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = 0, \quad \sum_j \tau_j = 0 \text{ (relativamente a qualquer ponto)}. \quad (1.4.38)$$

CAPÍTULO 2

Sistemas oscilatórios

Consideremos um sistema físico que possui uma configuração de equilíbrio estável. Exemplos a ter em mente podem ser um pêndulo, uma mola, uma corda esticada com as extremidades fixas, mas também uma órbita estável de um planeta em torno do Sol. Quando a configuração de equilíbrio é perturbada, o sistema vai oscilar em torno dessa posição de equilíbrio; nos casos realistas, tipicamente haverá dissipação de energia, e o sistema regressará à posição de equilíbrio após algum tempo. As oscilações que o sistema perturbado efectua em torno da posição de equilíbrio descrevem um *movimento harmónico simples*, possivelmente amortecido ou forçado. Neste capítulo iremos estudar estes movimentos em detalhe, focando os exemplos mais básicos de um pêndulo ou de uma mola. Devemos, no entanto, manter presente a ideia que este tipo de movimentos existem em sistemas muito mais gerais.

2.1 Oscilador harmónico simples

Se a força que actua num corpo (que possui uma posição de equilíbrio):

- é proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio;
- aponta sempre para a posição de equilíbrio;

o corpo tem um movimento harmónico simples (MHS) quando é deslocado da posição de equilíbrio.

O MHS causado por uma força elástica foi já discutido na secção 1.2.2. Para o caso de um sistema 1-dimensional sujeito à força $F = -kx$, a segunda lei de Newton para uma massa m toma a forma:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0 .$$

Como já vimos a solução desta equação é

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) , \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad (2.1.1)$$

onde A é a *amplitude* e ϕ_0 é a *fase inicial*, sendo ambas constantes de integração; ω é a *frequência angular* de oscilação e o argumento do cosseno é designado por *fase*.

A frequência é determinada pelas propriedades do sistema (da constante da mola k e da massa m). As constantes de integração A e ϕ_0 são determinadas pelas condições iniciais do seguinte modo. Denotando por x_i e v_i a posição e velocidades em $t = 0$ temos que

$$x_i = A \cos \phi_0 , \quad v_i = -A\omega \sin \phi_0 ;$$

Logo

$$\phi_0 = \arctan \left(-\frac{v_i}{\omega x_i} \right) , \quad A = \sqrt{x_i^2 + \left(\frac{v_i}{\omega} \right)^2} .$$

É habitual definir ainda as seguintes quantidades:

- O *período* T , que é o tempo que demora uma oscilação completa:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} ;$$

- a *frequência* f , que é o inverso do período e corresponde ao número de oscilações por unidade de tempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} .$$

O período e a frequência são medidos em ‘segundos’ e ‘Hertz’ (Hz) no sistema internacional de unidades; $1 Hz = 1 s^{-1}$. Observe-se que a frequência e o período só dependem da constante da mola k e da massa m . Não dependem das condições iniciais, que definem a amplitude e fase inicial. Observe-se ainda que molas mais duras (i.e. com k maior) oscilam com frequência maior.

A velocidade e a aceleração do movimento são determinadas diferenciando (2.1.1) uma ou duas vezes, respectivamente, em ordem ao tempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi_0) \quad , \quad a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi_0) \quad .$$

Em particular observe-se que:

- $a(t) = -\omega^2 x(t)$, pelo que a aceleração tem o sentido contrário ao deslocamento, como esperado da lei de Hooke; ou seja aceleração e a posição estão desfasadas de π ;
- A velocidade máxima é $v_{max} = \pm\omega A$, que ocorre quando o deslocamento é nulo; ou seja, velocidade e posição estão desfasados de $\pi/2$.

O MHS resulta de uma troca constante entre a energia cinética e a energia potencial elástica do sistema. Usando os resultados das secções 1.3.2 e 1.3.5, cada uma destas é:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) \quad , \quad E_p^e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi_0) \quad ;$$

consequentemente verifica-se que a energia mecânica é constante:

$$E_M = E_c + E_p^e = \frac{1}{2}kA^2 \quad ,$$

como esperado pelo facto de a força elástica ser conservativa.

2.2 Oscilador harmónico amortecido

O oscilador harmónico simples é uma idealização. Na prática há sempre dissipação de energia (por exemplo devido a forças de atrito) e uma consequente diminuição da amplitude; esta é a origem do *amortecimento*. Para obtermos um modelo de um oscilador amortecido

podemos considerar uma mola imersa num fluido. Como vimos na secção 1.2.2 neste sistema existe uma força de atrito viscoso $F = -bv$. A equação do movimento fica então:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0 . \quad (2.2.2)$$

A solução desta equação depende do regime considerado, isto é da razão entre o coeficiente de amortecimento b e a constante da mola k . É conveniente definir os parâmetros

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} , \quad 2\gamma = \frac{b}{m} , \quad (2.2.3)$$

Se $\gamma < \omega_0$, que designamos por *regime de amortecimento fraco*, a solução da equação do movimento é:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \phi_0) , \quad \omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} . \quad (2.2.4)$$

Neste regime temos ainda um movimento oscilatório, como é manifesto pela presença da função cosseno, mas com uma amplitude que tem um certo valor inicial A_0 , mas diminui exponencialmente com o tempo:

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t} .$$

Adicionalmente verificamos que a frequência é menor do que ω_0 , ou seja, do que a frequência do mesmo oscilador harmónico mas sem amortecimento - Fig. 2.1.

Se $\gamma \geq \omega_0$ temos os regimes de *amortecimento crítico* ($\gamma = \omega_0$) e o regime *sobre-amortecido* ($\gamma > \omega_0$). Nestes casos pode-se também escrever uma solução explícita da equação do movimento. Verifica-se que não há oscilação; apenas um movimento amortecido que tende para a posição de equilíbrio.

2.3 Oscilador harmónico forçado: ressonância

Como na prática existe sempre amortecimento de um oscilador harmónico, para o manter a oscilar é necessário fornecer-lhe energia, aplicando uma força externa. Se essa força for ela própria harmónica, com uma certa frequência ω_f , o sistema, ao fim de algum tempo, irá adquirir a frequência da força externa. Nesse regime, a energia fornecida numa oscilação

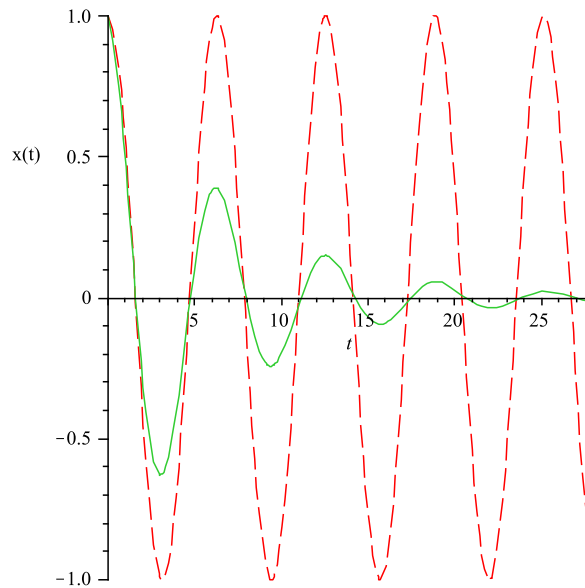


Figura 2.1: Posição em função do tempo para um oscilador harmónico simples com $A = 1$, $\phi_0 = 0$, $\omega = 1$ (curva tracejada a vermelho) e para um oscilador harmónico amortecido com $A_0 = 1$, $\phi_0 = 0$, $\omega_0 = 1$, $b/2m = 0.15$ (curva sólida a verde). Note-se que a frequência é ligeiramente menor para o caso amortecido.

será igual à dissipada e como tal a amplitude manter-se-á constante, dependendo o seu valor dos vários parâmetros do sistema.

Consideramos uma força harmónica do tipo:

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega_f t) .$$

A equação do movimento de um oscilador harmónico com amortecimento e forçamento fica então:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega_f t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = F_0 \cos(\omega_f t) .$$

Pode-se verificar que o sistema tem como solução (no regime em que foi atingida a frequência da força externa):

$$x(t) = A \cos(\omega_f t - \phi) ,$$

onde a amplitude A , e a fase ϕ , que mede o *desfasamento* entre a força exterior e a posição,

são dadas por:

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + (2\gamma\omega_f)^2}}, \quad \tan \phi = \frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2}.$$

Observe-se que no denominador da amplitude surge o factor $(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2$; quando $\omega_f = \omega_0$ e $b = 0$ verifica-se o fenómeno de *ressonância*: a amplitude diverge - Fig. 2.2. No caso geral a ressonância ocorre quando a amplitude é máxima:

$$\frac{\partial A}{\partial \omega_f} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (2.3.5)$$

Simultaneamente verificamos que o desfasamento ϕ tende para $\pm\pi/2$ (quando $\gamma \rightarrow 0$). Ou seja, quando o deslocamento é máximo, a força externa é mínima e quando o deslocamento é mínimo a força externa é máxima. A situação é análoga a empurrar eficientemente um baloiço de modo a conseguir uma amplitude elevada. Este sistema é um exemplo de um oscilador harmónico com amortecimento e forçamento.

2.4 Oscilações acopladas

Vamos agora considerar sistemas físicos onde dois ou mais osciladores se encontram acoplados. Nestas circunstâncias a compreensão do sistema reside na determinação dos chamados *modos normais de vibração*. Nesta secção aprenderemos a determina-los.

2.4.1 Dois pêndulos acoplados por uma mola

Começamos por reconsiderar o pêndulo simples, já considerado na secção 1.2.2. A sua dinâmica pode ser obtida por uma aplicação da lei fundamental da mecânica de rotação: $\tau = I\alpha$. Considerando o pêndulo como representado na Fig. 2.3, o torque do peso relativamente ao ponto O - observe que a tensão tem torque nulo - é dado por $-mgl \sin \theta$ (note-se o sinal menos devido a este torque imprimir aceleração angular no sentido dos ponteiros do relógio); o momento de inércia da massa relativamente a um eixo ortogonal ao plano de oscilação e que passa por O é ml^2 ; e $\alpha = d^2\theta/dt^2$. Logo obtemos

$$-lmg \sin \theta = ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

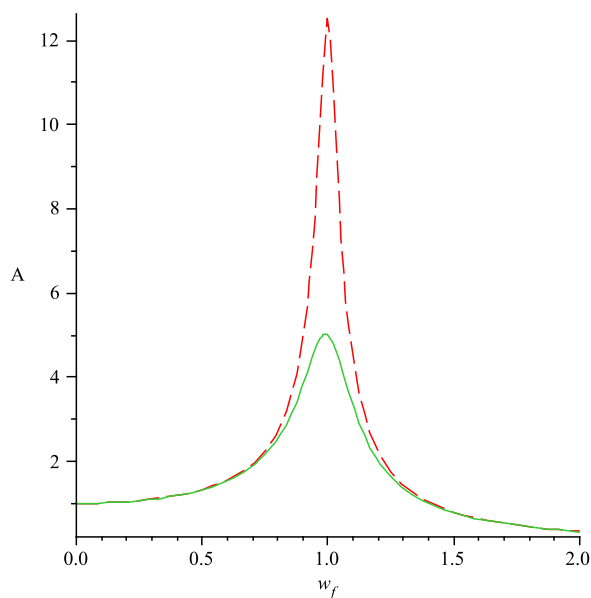


Figura 2.2: Amplitude de oscilação em função de ω_f , para um movimento harmônico com amortecimento e forçamento, com $\omega_0 = 1$, no regime em que as oscilações adquirem a frequência da força externa. A curva sólida (verde) tem um parâmetro de amortecimento maior do que a curva tracejada (vermelha). Para $\omega_f \simeq 1$ a amplitude é máxima - ressonância e a amplitude é maior na ressonância para um amortecimento menor.

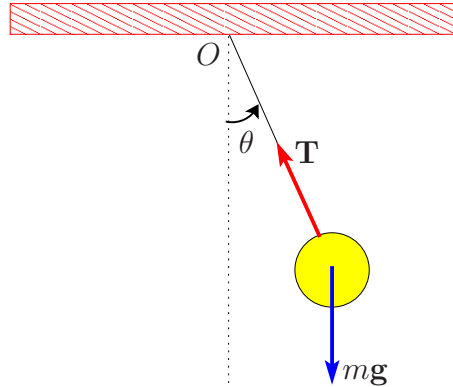


Figura 2.3: Um pêndulo simples, onde uma massa m está suspensa por um fio de comprimento l preso num ponto O .

que é a equação (1.2.6) obtida no capítulo anterior. Para pequenas oscilações a solução é

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \phi_0) , \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{g}{l}} , \quad (2.4.6)$$

que corresponde a um movimento harmónico simples com frequência ω .

Consideremos agora dois pêndulos acoplados por uma mola, tal como ilustrado na Fig. 2.4. Para ângulos pequenos podemos considerar que a mola permanece horizontal; de facto os alongamentos horizontal e vertical da mola são, respectivamente:

$$\text{horizontal :} \quad \Delta x = l(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \simeq l(\theta_2 - \theta_1) ,$$

$$\text{vertical :} \quad \Delta y = (l - l \cos \theta_1) - (l - l \cos \theta_2) = (l \cos \theta_2 - l \cos \theta_1) \simeq \frac{l}{2}(\theta_2^2 - \theta_1^2) \simeq 0 ,$$

dado que ignoramos termos quadráticos em θ . Consideremos a massa da esquerda na Fig. 2.4. Se este alongamento é positivo (negativo) a mola exerce uma força para a direita (esquerda) sobre esta massa. Em qualquer dos casos esta força é

$$F_x^{\text{esquerda}} = kl(\theta_2 - \theta_1) .$$

Analogamente para a massa da direita. Se este alongamento é positivo (negativo) a mola exerce uma força para a esquerda (direita) sobre esta massa. Em qualquer dos casos esta força é

$$F_x^{\text{direita}} = -kl(\theta_2 - \theta_1) .$$

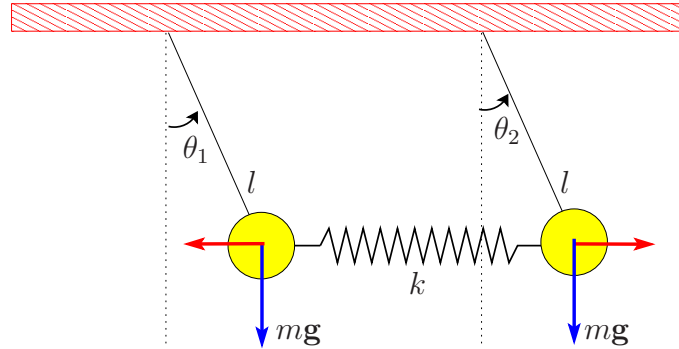


Figura 2.4: Dois pêndulos simples, ambos com comprimento l e massa m acoplados por uma mola com constante k . As setas vermelhas indicam a força exercida pela mola em cada uma das massas no caso de a mola se encontrar comprimida.

Devido à força exercida pela mola, cada uma das massas sofre um torque adicional (relativamente ao caso do pêndulo simples). O torque adicional sobre a massa da esquerda é

$$lF_x^{\text{esquerda}} \sin(\pi/2 - \theta_1) \simeq lF_x^{\text{esquerda}} = kl^2(\theta_2 - \theta_1) ,$$

onde a aproximação é válida para ângulos pequenos. O torque adicional sobre a massa da direita é, na mesma aproximação,

$$lF_x^{\text{direita}} \sin(\pi/2 - \theta_2) \simeq lF_x^{\text{direita}} = -kl^2(\theta_2 - \theta_1) .$$

Logo, na aproximação de ângulos pequenos as equações de movimento dos dois pêndulos são:

$$-lmg\theta_1 + kl^2(\theta_2 - \theta_1) = ml^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} \quad (2.4.7)$$

$$-lmg\theta_2 - kl^2(\theta_2 - \theta_1) = ml^2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} . \quad (2.4.8)$$

Somando e subtraindo as duas equações anteriores obtemos:

$$\begin{aligned} -lmg(\theta_1 + \theta_2) &= ml^2 \frac{d^2}{dt^2}(\theta_1 + \theta_2) \\ -lmg(\theta_1 - \theta_2) + 2kl^2(\theta_2 - \theta_1) &= ml^2 \frac{d^2}{dt^2}(\theta_1 - \theta_2) , \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\theta_1 + \theta_2) + \frac{g}{l}(\theta_1 + \theta_2) &= 0 \\ \frac{d^2}{dt^2}(\theta_1 - \theta_2) + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}\right)(\theta_1 - \theta_2) &= 0 . \end{aligned}$$

Observamos agora que em cada uma das equações anteriores as variáveis dependentes aparecem numa única combinação: $\theta_1 + \theta_2$ na primeira equação; $\theta_1 - \theta_2$ na segunda equação. Nestas combinações de variáveis, as duas equações são independentes; dizemos por isso que o sistema está diagonalizado. Cada uma destas equações é agora a equação de um oscilador harmónico simples, nas novas variáveis $\theta_1 + \theta_2$ e $\theta_1 - \theta_2$, que sabemos resolver. As soluções são:

$$\theta_1(t) + \theta_2(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \phi_+) , \quad \omega_+ \equiv \sqrt{\frac{g}{l}} , \quad (2.4.9)$$

$$\theta_1(t) - \theta_2(t) = A_- \cos(\omega_- t + \phi_-) , \quad \omega_- \equiv \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}} , \quad (2.4.10)$$

onde A_{\pm} e ϕ_{\pm} são constantes de integração. É agora simples obter a solução genérica para cada um dos ângulos:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{1}{2} [A_+ \cos(\omega_+ t + \phi_+) + A_- \cos(\omega_- t + \phi_-)] , \\ \theta_2(t) &= \frac{1}{2} [A_+ \cos(\omega_+ t + \phi_+) - A_- \cos(\omega_- t + \phi_-)] . \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Verificamos que o movimento em cada um dos ângulos é, genericamente, a sobreposição de dois movimentos harmónicos puros, com frequências ω_{\pm} e amplitudes A_{\pm} . Se tomarmos

i) $A_- = 0$, observamos que

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) = \frac{A_+}{2} \cos(\omega_+ t + \phi_+) ; \quad (2.4.12)$$

ii) $A_+ = 0$, observamos que

$$\theta_1(t) = -\theta_2(t) = \frac{A_-}{2} \cos(\omega_- t + \phi_-) . \quad (2.4.13)$$

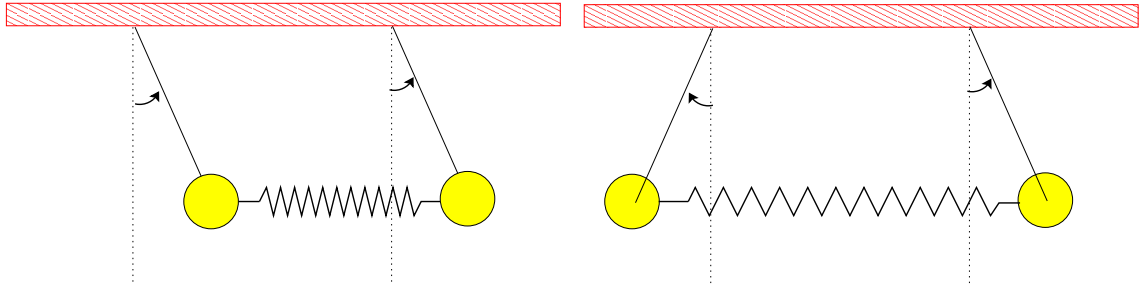


Figura 2.5: Modos normais de um sistema de dois pêndulos acoplados por uma mola. A figura da esquerda (direita) corresponde à oscilação em fase (oposição de fase).

Nestes dois casos, ambos os ângulos oscilam com a mesma frequência, amplitude constante e passam em simultâneo na posição de equilíbrio. Estas configurações são denominadas de *modos normais de oscilação do sistema*, e ω_{\pm} são as suas frequências. No caso *i*) os pêndulos oscilam em *fase*; no caso *ii*) os pêndulos oscilam em *oposição de fase* - Fig. 2.5.

Em geral os modos normais de um sistema de vários graus de liberdade acoplados correspondem a configurações em que os graus de liberdade se comportam de um modo independente, no sentido em que não trocam energia. Nestas configurações todos os graus de liberdade têm a mesma frequência, uma amplitude fixa - manifestando a ausência de trocas de energia entre os graus de liberdade - e passam em simultâneo na posição de equilíbrio.

O movimento genérico de cada ângulo no sistema de dois pêndulos é uma combinação linear dos modos normais. As constantes de integração A_{\pm} e ϕ_{\pm} dependem das condições iniciais. Consideramos agora um caso particular em que se observa claramente as trocas de energia entre os pêndulos. Tomamos para isso $A_{+} = A_{-} \equiv A$ e $\phi_{+} = \phi_{-} = 0$ (de modo a não haver desfaseamento). A solução (2.4.11) fica

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{A}{2} [\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)] = A \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_- - \omega_+}{2} t\right), \\ \theta_2(t) &= \frac{A}{2} [\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)] = A \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_- - \omega_+}{2} t\right).\end{aligned}\quad (2.4.14)$$

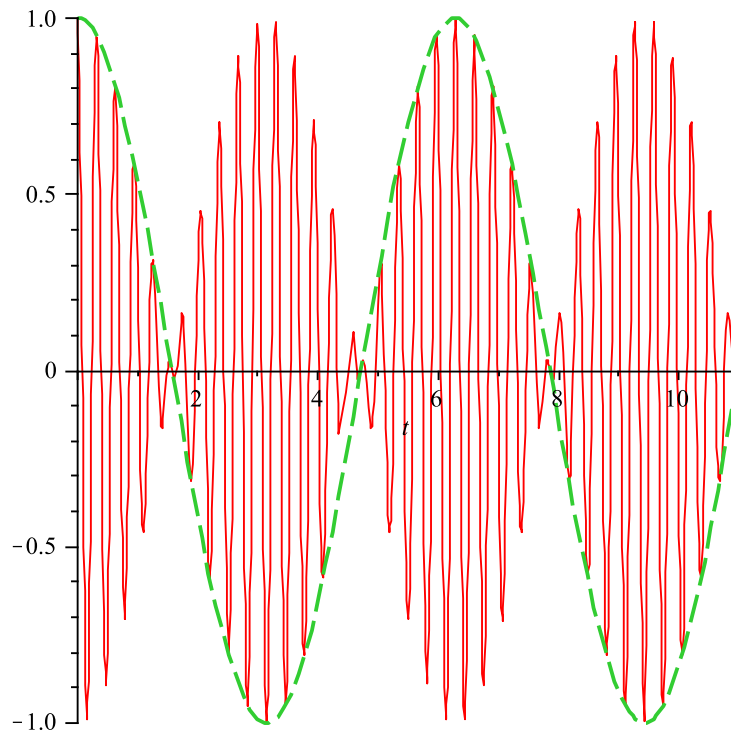


Figura 2.6: $\theta_1(t)$ em função de t para a configuração (2.4.14). A envolvente (de frequência mais baixa) é representada pela linha tracejada (verde), que tem frequência $(\omega_- - \omega_+)/2$.

Na última igualdade de cada equação usámos as bem conhecidas identidades:

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) , \\ \cos \alpha - \cos \beta &= 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) .\end{aligned}$$

A solução (2.4.14) revela que cada ângulo oscila com uma frequência mais elevada $(\omega_+ + \omega_-)/2$, modulada por uma envolvente de frequência mais baixa $(\omega_- - \omega_+)/2$ - Fig. 2.6. Como se pode ver na figura, a oscilação pára periodicamente. O intervalo de tempo entre duas paragens consecutivas é metade do período associado a frequência mais baixa. Logo a frequência desta paragens é o dobro da frequência mais baixa; esta frequência denomina-se *frequência de batimento*:

$$\omega_b = \omega_- - \omega_+ .$$

2.4.2 Caso geral: método matricial

No caso que acabámos de estudar, de dois pêndulos de igual massa e comprimento acoplados por uma mola, a diagonalização do sistema foi conseguida por um método de inspeção, em que somámos e subtraímos as duas equações do movimento. No caso geral de um sistema de osciladores acoplados, a diagonalização do sistema não será tão simples e um método de inspeção não será eficiente. Em geral recorre-se a um *método matricial*, que permite determinar as frequências próprias dos modos normais e a relação de amplitudes relativas dos osciladores em cada modo próprio de oscilação do sistema. Consideremos que o sistema de osciladores tem N graus de liberdade $x_i(t)$, $i = 1 \dots N$. O método matricial consiste em:

i) Introduzir no sistema de N equações diferenciais (α_j^i são constantes):

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} + \sum_{i=1}^N \alpha_1^i x_i = 0 \\ \dots \\ \frac{d^2 x_N}{dt^2} + \sum_{i=1}^N \alpha_N^i x_i = 0 \end{cases}$$

o ansatz (i.e. a forma de solução):

$$x_i(t) = A_i \cos(\omega t) , \quad i = 1 \dots N .$$

ii) O sistema de equações diferenciais transforma-se num sistema de equações algébricas:

$$\begin{cases} -A_1 \omega^2 + \sum_{i=1}^N \alpha_1^i A_i = 0 \\ \dots \\ -A_N \omega^2 + \sum_{i=1}^N \alpha_N^i A_i = 0 \end{cases} \quad (2.4.15)$$

Este sistema é homogéneo nas amplitudes, pelo que tem uma solução óbvia:

$$A_i = 0 , \quad i = 1 \dots N .$$

Para ter outra solução, o sistema de equações terá de ser sub-determinado; isto é, terá de haver equações linearmente dependentes. Na prática, isto requer que a matriz formada pelos coeficientes das amplitudes A_i deverá ter determinante nulo:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 - \omega^2 & \dots & \alpha_1^N \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_N^1 & \dots & \alpha_N^N - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Para um sistema de N equações, esta condição dará origem a N soluções para a frequência ω :

$$\{\omega_1, \dots, \omega_N\} . \quad (2.4.16)$$

Estas são as frequências dos modos normais.

- iii) Colocando cada uma das frequências obtidas para os modos normais (2.4.16) no sistema algébrico para as amplitudes (2.4.15), podem ser obtidas as amplitudes relativas para cada modo normal.

Exemplo: dois pêndulos acoplados por uma mola

Para exemplificar o método matricial vamos reconsiderar o exemplo estudado na Secção 2.4.1. Este é um exemplo com dois graus de liberdade, os dois ângulos θ_1 e θ_2 ; logo $N = 2$. Seguimos então os passos da Secção 2.4.2:

- i) Reconsideramos os sistema de $N = 2$ equações diferenciais (2.4.7) e (2.4.8):

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\theta_1 - \frac{k}{m}\theta_2 = 0 , \\ \frac{d^2\theta_2}{dt^2} - \frac{k}{m}\theta_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\theta_2 = 0 , \end{cases}$$

e usamos o ansatz (i.e. a forma de solução):

$$\theta_1(t) = A_1 \cos(\omega t) , \quad \theta_2(t) = A_2 \cos(\omega t) .$$

ii) O sistema de equações diferenciais transforma-se num sistema de equações algébricas:

$$\begin{cases} -A_1\omega^2 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)A_1 - \frac{k}{m}A_2 = 0 \\ -A_2\omega^2 - \frac{k}{m}A_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)A_2 = 0 \end{cases} \quad (2.4.17)$$

Este sistema é homogéneo nas amplitudes, pelo que tem uma solução óbvia:

$$A_1 = 0 = A_2 .$$

Para ter outra solução, o sistema de equações terá de ser sub-determinado; isto é, a matriz formada pelos coeficientes das amplitudes A_1, A_2 deverá ter determinante nulo:

$$\begin{vmatrix} \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Obtemos deste condição duas soluções para a frequência ω :

$$\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \frac{k^2}{m^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega^2 = \pm \frac{k}{m} ,$$

ou seja, há duas soluções:

$$\omega^2 = \begin{cases} \omega_+^2 = \frac{g}{l} \\ \omega_-^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} . \end{cases} \quad (2.4.18)$$

Estas são de facto as frequências dos modos normais que já tínhamos visto em (2.4.9) e (2.4.10).

iii) Finalmente, colocando cada uma das frequências obtidas para os modos normais (2.4.18) no sistema algébrico para as amplitudes (2.4.17), podem ser obtidas as amplitudes relativas para cada modo normal:

• Para $\omega = \omega_+$, (2.4.17), fica:

$$\begin{cases} -A_1\frac{g}{l} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)A_1 - \frac{k}{m}A_2 = 0 \\ -A_2\frac{g}{l} - \frac{k}{m}A_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)A_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A_1 = A_2 \equiv \frac{A_+}{2} ; \quad (2.4.19)$$

- Para $\omega = \omega_-$, (2.4.17), fica:

$$\begin{cases} -A_1 \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right) + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right) A_1 - \frac{k}{m} A_2 = 0 \\ -A_2 \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right) - \frac{k}{m} A_1 + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m} \right) A_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A_1 = -A_2 \equiv \frac{A_-}{2} .$$

(2.4.20)

Logo o primeiro modo normal de oscilação tem a solução:

$$\theta_1(t) = \frac{A_+}{2} \cos(\omega_+ t) , \quad \theta_2(t) = \frac{A_+}{2} \cos(\omega_+ t) ,$$

enquanto que o segundo tem solução:

$$\theta_1(t) = \frac{A_-}{2} \cos(\omega_- t) , \quad \theta_2(t) = -\frac{A_-}{2} \cos(\omega_- t) .$$

A menos de uma fase irrelevante (consiste numa redefinição da coordenada temporal) estes são exactamente os modos normais de oscilação obtidos em (2.4.12) e (2.4.13), que agora foram obtidos pelo método matricial.

CAPÍTULO 3

Campo eléctrico e magnético

Até agora discutimos as leis da Mecânica e estudámos a dinâmica de partículas pontuais e de corpos rígidos actuados por forças. Estas forças foram classificadas como forças de contacto ou forças à distância. A nível fundamental, no entanto, não existem forças de contacto. Todas as forças derivam de interacções à distância, sendo que as forças de contacto que discutimos nos capítulos anteriores são uma manifestação macroscópica da *interacção electromagnética* (e também da interacção gravitacional). Neste capítulo vamos discutir os princípios básicos das interacções eléctrica e magnética em situações em que os campos eléctrico e magnético são invariantes no tempo - *electrostática* e *magnetostática*. Iremos no final do capítulo discutir também alguns fenómenos de *electrodinâmica*, em que há variações temporais de campos electromagnéticos, nomeadamente fenómenos de indução.

3.1 Lei de Coulomb

De acordo com a teoria da gravitação de Newton descrita na secção 1.2.3, todos os corpos materiais, isto é que têm massa, interagem gravitacionalmente. Em particular dois corpos materiais atraem-se devido a uma força descrita pela equação (1.2.18).

Alguns corpos materiais têm uma outra propriedade, denominada *carga eléctrica*, que

os faz experimentar uma outra interacção, denominada *interacção eléctrica*. Ao contrário da massa, que é sempre uma grandeza positiva, a carga eléctrica é uma grandeza que pode ser positiva ou negativa. A existência destes dois sinais de carga foi introduzida como um modelo para o facto experimental que a força eléctrica entre duas cargas pode ser atractiva ou repulsiva.

Concretamente, a *Lei de Coulomb* afirma que a força eléctrica entre dois corpos materiais com carga:

- é atractiva (repulsiva) para cargas opostas (iguais) e dirigida ao longo da linha que une os dois corpos;
- é proporcional ao produto das massas, q_1 e q_2 , dos corpos;
- é inversamente proporcional ao quadrado da distância, r , entre eles:

$$|\mathbf{F}_e| = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} . \quad (3.1.1)$$

A constante de proporcionalidade, k_e , tem valor

$$k_e = 8.9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} .$$

Na dimensionalidade de k_e note-se a existência da unidade C , isto é *Coulomb*, que é a unidade SI de carga eléctrica. Notamos que é frequente escrever a constante k_e em termos da *permissividade eléctrica no vazio*, ϵ_0

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} ,$$

onde ϵ_0 tem o valor

$$\epsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} .$$

É importante ter a noção que a interacção eléctrica é extraordinariamente mais forte do que a interacção gravitacional. Para ilustrar esta observação podemos comparar a magnitude da força gravítica com a magnitude da força eléctrica para dois electrões. Sabendo que a massa e carga (em valor absoluto) de um electrão são, respectivamente,

$$m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg} , \quad e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C} ,$$

obtemos, usando (1.2.18) e (3.1.1)

$$\frac{|\mathbf{F}_g|}{|\mathbf{F}_e|} = \frac{G m_e^2}{k_e e^2} \sim 10^{-43} .$$

Ou seja, a força eléctrica entre dois electrões é cerca de 10^{43} vezes maior do que a força gravítica entre eles. O facto que a interacção gravitacional é relevante, de facto dominante, em muitos sistemas do Universo - por exemplo para o movimento dos planetas em torno do Sol - é possível apenas devido à neutralidade eléctrica dos constituintes desses sistemas.

3.2 Campo eléctrico e a lei de Gauss

Tal como no caso da interacção gravitacional, para tornar mais intuitiva a natureza de “acção à distância” da força eléctrica, foi introduzido o conceito de *campo eléctrico*. O campo eléctrico é a *força por unidade de carga positiva q (teste) produzida por uma carga Q (fonte)*. Considerando que a carga Q é colocada na origem de um sistema de coordenadas, o campo eléctrico num ponto com vector posição \mathbf{r} é dado por (seja $r = |\mathbf{r}|$):

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\mathbf{F}(r)}{q} = k_e \frac{Q}{r^2} \mathbf{u}_r , \quad (N/C) \quad (3.2.2)$$

onde $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$ é o versor na direcção do vector posição desse ponto. Note-se que ao contrário do campo gravítico, o campo eléctrico não é um campo de acelerações. As suas unidades são N/C . Uma partícula de carga q e massa m colocada no campo eléctrico produzido por uma carga Q , terá uma aceleração dada por:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{q}{m} \mathbf{E}(r) . \quad (3.2.3)$$

Logo, partículas com diferentes razões entre carga e massa terão diferentes acelerações num campo eléctrico, em contraste com o campo gravítico onde todas as partículas materiais têm a mesma aceleração. Note-se também, de (3.2.3), que como o campo eléctrico é a força por unidade de carga para cargas positivas, a direcção do campo eléctrico coincide com a direcção da aceleração de uma carga positiva e portanto depende do sinal da carga fonte Q - Fig. 3.1.

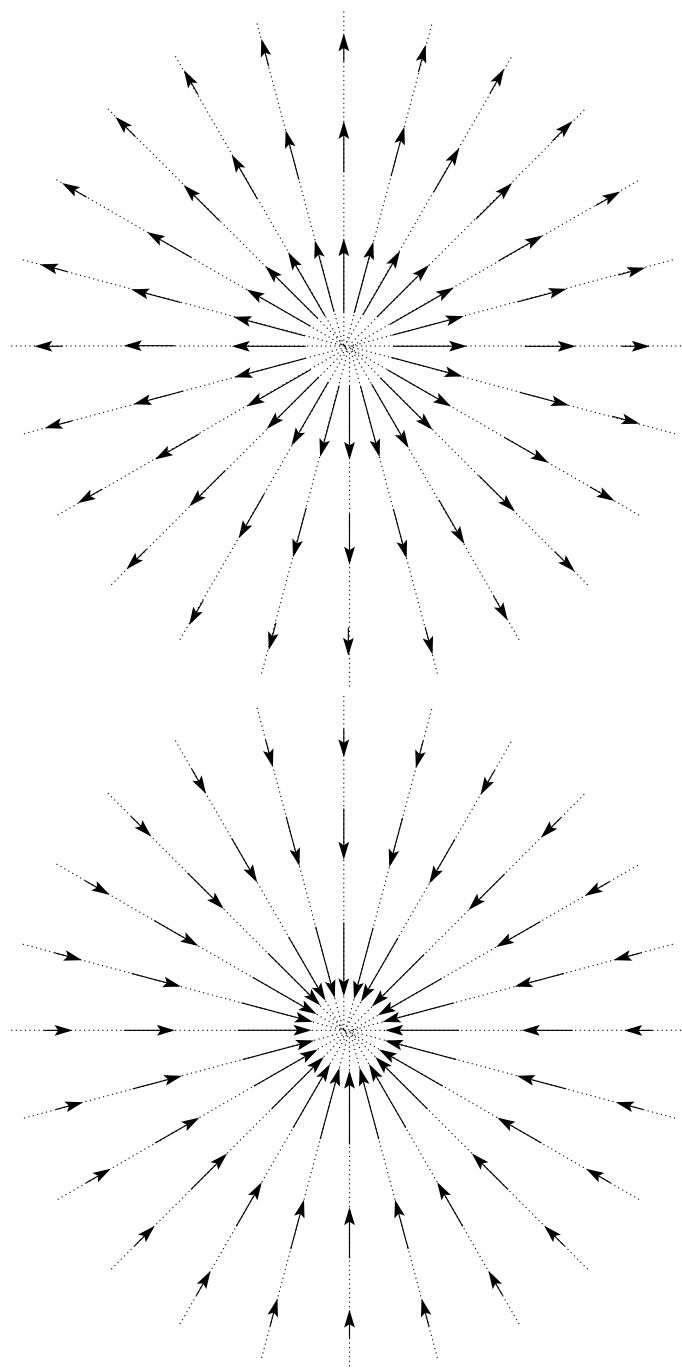


Figura 3.1: Representação do campo eléctrico criado por uma carga pontual. Topo: carga fonte positiva, $Q > 0$. Fundo: carga fonte negativa, $Q < 0$.

A teoria do campo eléctrico (e de facto a teoria electromagnética geral) é uma *teoria linear*. Isto significa que é aplicável o princípio da sobreposição: *o campo eléctrico gerado por um conjunto de cargas é a soma dos campos eléctricos de cada uma delas*. Deste modo, o campo eléctrico num ponto \mathcal{P} com vector posição \mathbf{r} , gerado pelas cargas Q_i , $i = 1, \dots, N$, cada uma com vector posição $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}(Q_i)$ num determinado referencial - Fig. 3.2 - é

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_e \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (3.2.4)$$

Numa distribuição contínua de cargas, onde cada elemento de carga tem vector posição $\mathbf{r}(q)$ esta soma deve ser substituída por um integral:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(q)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}(q)|^3} dq. \quad (3.2.5)$$

Para resolver este integral é típico substituir o integral na carga por um integral espacial. Numa distribuição volumétrica de carga $dq = \rho dV$, onde ρ é a *densidade volumétrica* de carga; numa distribuição superficial de carga $dq = \sigma dA$, onde σ é a *densidade superficial* de carga; numa distribuição linear de carga $dq = \lambda dl$, onde λ é a *densidade linear* de carga. Assim, por exemplo, numa distribuição de carga num volume, denotando o vector posição que cobre o volume por \mathbf{r}' e $dV = d^3\mathbf{r}'$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_e \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'.$$

Para calcular o campo eléctrico de uma distribuição de cargas eléctricas tipicamente recorreremos às fórmulas (3.2.4) ou (3.2.5). Existe no entanto um método alternativo que se torna conveniente em situações de elevada simetria. Este método usa a *Lei de Gauss* que estabelece o seguinte:

Lei de Gauss:

O fluxo Φ de campo eléctrico \mathbf{E} através de uma superfície fechada S , com elemento de área dA e versor normal (apontado para fora) \mathbf{n} , é igual à carga eléctrica total contida no interior da superfície, Q , dividida por ϵ_0 :

$$\Phi_S(\mathbf{E}) \equiv \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (3.2.6)$$

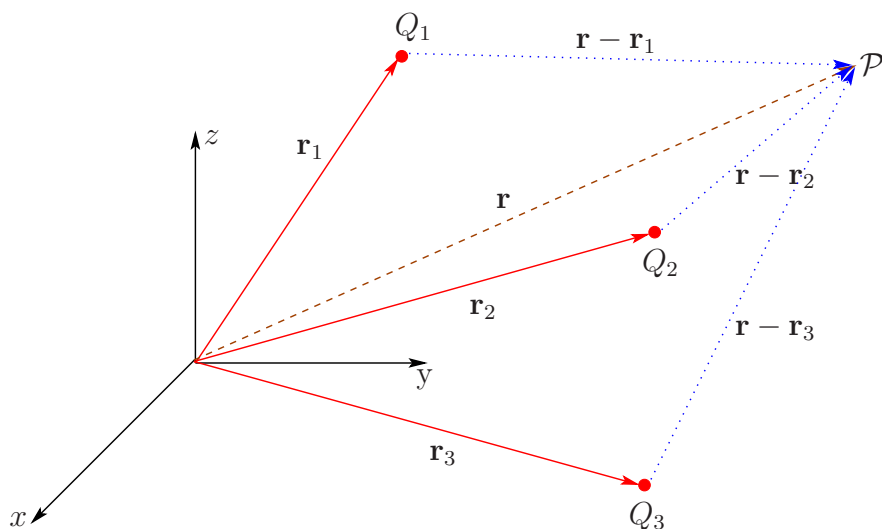


Figura 3.2: Um ponto com \mathcal{P} com vector posição \mathbf{r} (linha tracejada castanha) e três cargas Q_i , $i = 1 \dots 3$ (bolinhas vermelhas) com vectores posição \mathbf{r}_i (linhas sólidas vermelhas). Os vectores que unem as cargas ao ponto \mathcal{P} são $\mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ (linhas pontilhadas azuis).

A superfície fechada S onde se faz esta integração denomina-se *superfície Gaussiana*.

Para usar a lei de Gauss com o objectivo de calcular o campo eléctrico usa-se o seguinte procedimento:

- i) Dadas as simetrias do problema, sugere-se uma forma para a direcção e dependência coordenada do campo eléctrico. Por exemplo, num problema com simetria esférica, toma-se $\mathbf{E} = E_r(r)\mathbf{u}_r$, isto é, só existe componente radial e a componente radial só depende da coordenada radial.
- ii) Escolhe-se a superfície Gaussiana de modo a que o versor normal seja paralelo à direcção do campo eléctrica escolhida no ponto anterior. Por exemplo, num problema com simetria esférica, toma-se uma superfície Gaussiana esférica.
- iii) Calcula-se (3.2.6).

3.3 Energia potencial eléctrica e potencial eléctrico

A força eléctrica (na electrostática, força de Coulomb) é uma força conservativa. Como tal tem uma energia potencial associada que denominamos *energial potencial eléctrica*. Para calcular a forma desta energia potencial usamos o resultado (1.3.12): a variação da energia potencial eléctrica é igual a menos o trabalho realizado por uma força eléctrica externa (isto é, devido a outro conjunto de cargas) para deslocar uma carga q_0 ao longo de um percurso de \mathbf{r}_i até \mathbf{r}_f , sem variação da energia cinética:

$$\Delta E_p = E_p(\mathbf{r}_f) - E_p(\mathbf{r}_i) = -W(\mathbf{F}_e) = - \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}_e(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} . \quad (3.3.7)$$

Usando a definição de campo eléctrico (3.2.2) obtemos:

$$\Delta E_p = -q_0 \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} , \quad (3.3.8)$$

e se convencionarmos que a energia potencial é zero no infinito, temos (seja $\mathbf{r}_i = \infty$ e $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}$ e mudamos a variável muda de integração de \mathbf{r} para \mathbf{r}')

$$E_p(\mathbf{r}) = -q_0 \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' . \quad (3.3.9)$$

Esta equação torna clara que a energia potencial é a energia que temos de fornecer ao sistema para trazer a carga q_0 do infinito até à posição \mathbf{r} .

Por outro lado definimos a *diferença de potencial eléctrico* (*ddp*) como sendo igual a menos o trabalho por unidade de carga realizado por uma fora eléctrica externa para deslocar a carga q_0 ao longo de um percurso de \mathbf{r}_i até \mathbf{r}_f sem variação de energia cinética. O potencial eléctrico é denotado por V e as suas unidades S.I. são o *Volt = Joule/Coulomb*. Assim, a diferença de potencial entre dois pontos é:

$$\Delta V = V(\mathbf{r}_f) - V(\mathbf{r}_i) = - \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} , \quad (3.3.10)$$

e convencionando que o potencial eléctrico é zero no infinito, temos (seja $\mathbf{r}_i = \infty$ e $\mathbf{r}_f = \mathbf{r}$ e mudamos a variável muda de integração de \mathbf{r} para \mathbf{r}')

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' . \quad (3.3.11)$$

Esta equação integral pode ser convertida numa relação diferencial. Para a motivarmos, note-se que esta relação implica, infinitesimalmente, em coordenadas Cartesianas:

$$dV(x, y, z) = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) ; \quad (3.3.12)$$

por outro lado, o diferencial de V escreve-se:

$$dV(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz ; \quad (3.3.13)$$

logo,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} , \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} , \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} , \quad (3.3.14)$$

ou, usando o operador gradiente (1.3.15)

$$\mathbf{E} = -\nabla V . \quad (3.3.15)$$

Esta é uma importante relação: diz-nos que o campo eléctrico está totalmente codificado numa grandeza escalar - o potencial eléctrico. Como é mais fácil compreender um campo escalar do que um campo vectorial, esta relação tem grande utilidade. Como exemplo notamos que esta relação implica que o campo é sempre perpendicular às *superfícies equipotenciais* - superfícies onde o potencial eléctrico tem um valor constante.

3.3.1 Energia potencial e potencial eléctrico para cargas pontuais

Com as convenções referidas note-se que, de (3.3.9) e (3.3.11), existe uma relação simples entre energia potencial de um sistema de cargas *devida à interação com uma carga q_0* e o potencial eléctrico do sistema de cargas:

$$E_p(\mathbf{r}) = q_0 V(\mathbf{r}) . \quad (3.3.16)$$

Assim, calculando o potencial eléctrico para um sistema de cargas, a energia potencial eléctrica que o sistema possui devido à interacção com q_0 fica automaticamente determinada. Note-se, no entanto, que em geral esta não é a a energia potencial eléctrica total do sistema de cargas, como discutiremos em baixo.

Consideremos uma carga Q na origem de um sistema de coordenadas. O seu potencial eléctrico será

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \stackrel{(3.2.2)}{=} - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} k_e \frac{Q}{r^2} \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\infty}^r k_e \frac{Q}{r^2} dr = k_e \frac{Q}{r}. \quad (3.3.17)$$

Se em vez de estar na origem, a carga Q tiver um vector posição \mathbf{r}_Q o potencial eléctrico num ponto com vector posição \mathbf{r} é:

$$V(\mathbf{r}) = k_e \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q|}. \quad (3.3.18)$$

Usando o princípio de sobreposição já referido anteriormente, o potencial eléctrico devido a um conjunto de N cargas Q_i , com vectores de posição \mathbf{r}_i , tal como ilustrado na Figura 3.2 é dado por

$$V(\mathbf{r}) = k_e \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (3.3.19)$$

Relativamente à energia potencial começemos por considerar duas cargas pontuais, Q e q_0 , a uma distância r . Neste caso, podemos usar o resultado (3.3.16) e obtemos

$$E_p = k_e \frac{q_0 Q}{r}. \quad (3.3.20)$$

Esta energia é positiva (negativa) se as cargas têm o mesmo sinal (sinal contrário). Este sinal manifesta a interpretação da energia potencial eléctrica já mencionada:

A energia potencial electrostática de um conjunto de cargas, é a energia necessária para formar o sistema de cargas trazendo-as desde o infinito.

Essa energia é positiva/negativa (dado que é necessário contrariar o trabalho positivo/negativo que a força eléctrica executa) para cargas com o mesmo sinal/sinal contrário. Para um conjunto de N cargas é necessário somar sobre todos os pares de cargas:

$$E_p = k_e \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (3.3.21)$$

3.3.2 Potencial eléctrico numa distribuição contínua de cargas

No caso de estarmos na presença de uma distribuição contínua de cargas podemos calcular o potencial eléctrico usando dois métodos. Uma primeira opção é considerar que o elemento

de carga dq com vector posição \mathbf{r}' cria um elemento de potencial $dV(\mathbf{r})$ no ponto com vector de posição \mathbf{r} :

$$dV(\mathbf{r}) = k_e \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (3.3.22)$$

Integrando sobre todos os elementos de carga obtemos

$$V(\mathbf{r}) = \int k_e \frac{dq}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} . \quad (3.3.23)$$

Uma segunda opção, no caso de o campo eléctrico já ser conhecido é calcular o integral (3.3.11).

3.4 Capacidade e condensadores

3.4.1 Condutores carregados

Começamos esta secção referindo *materiais condutores carregados* que se encontram em equilíbrio electrostático. Um material condutor (como a maioria dos metais) consiste num material onde partículas com carga eléctrica se podem mover mais ou menos livremente. Neste materiais verifica-se que:

- A carga distribui-se na superfície exterior do condutor (como as cargas se repelem, tendem a distribuir-se o mais longe possível umas das outras).
- O campo eléctrico à superfície é perpendicular à superfície do condutor (se houvesse componente tangencial as cargas iriam ser aceleradas nessa direcção e como tal o equilíbrio electrostático ainda não teria sido atingido). Logo a superfície do condutor é uma superfície equipotencial.
- O campo eléctrico é nulo no interior do condutor e como tal o potencial eléctrico é constante no interior do condutor e com o mesmo valor que tem à superfície.

3.4.2 Capacidade de condutores carregados

Uma aplicação simples da lei de Gauss demonstra que o campo eléctrico de uma esfera condutora, com raio a e carga Q (onde portanto toda a carga se encontra distribuída na

superfície) é

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad \text{se } r > a, \quad \mathbf{E} = 0, \quad \text{se } r < a. \quad (3.4.24)$$

Usando (3.3.11) obtemos que o potencial eléctrico desta esfera é

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad \text{se } r \geq a, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}, \quad \text{se } r \leq a. \quad (3.4.25)$$

Verificamos assim que a razão entre a carga e o potencial eléctrico na superfície do condutor (onde o potencial é constante) é uma constante independente da carga:

$$\left(\frac{Q}{V} \right)_{\text{esfera condutora}} = 4\pi\epsilon_0 a. \quad (3.4.26)$$

A independência da carga resulta, naturalmente, do facto de o potencial ser proporcional à carga e é um facto para todos os condutores carregados, qualquer que seja a sua forma geométrica. Assim, definimos esta razão como sendo a *capacidade eléctrica de um condutor isolado*, denotada por C :

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (3.4.27)$$

A capacidade eléctrica é definida sempre positiva e tem unidades SI o *Farad*=Coulomb/Volt, abreviado F . Um Farad é a capacidade de um condutor isolado, cujo potencial eléctrico, depois de receber a carga de um Coulomb, é um Volt.

Podemos estender o conceito de capacidade eléctrica para um sistema de dois condutores isolados electricamente um do outro - este arranjo denomina-se por *condensador*. Se os dois condutores tiverem respectivamente cargas Q e $-Q$, e se os seus potenciais superficiais são respectivamente V_1 e V_2 , a capacidade do condensador é definida como a razão entre Q e a diferença de potencial (de modo a C ser positiva):

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}. \quad (3.4.28)$$

A capacidade de um condensador depende apenas da forma dos condutores, da sua posição relativa e do meio material presente entre eles. Como um exemplo, consideramos um condensador formado por duas placas planas e paralelas com cargas opostas. Como uma

aplicação simples da lei de Gauss, determina-se que o campo eléctrico de um plano infinito com densidade superficial de carga $\sigma > 0$, colocado em $y = 0$ é dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{j}, \quad \text{se } y > 0, \quad \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{j}, \quad \text{se } y < 0. \quad (3.4.29)$$

Um outro plano infinito com densidade superficial de carga $-\sigma$, colocado em $y = d > 0$ tem campo eléctrico dado por

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{j}, \quad \text{se } y > d, \quad \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\mathbf{j}, \quad \text{se } y < d. \quad (3.4.30)$$

Sobrepondo os dois planos, o campo eléctrico entre eles, ou seja para $0 < y < d$ será

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{j}. \quad (3.4.31)$$

Este campo constante resulta de um potencial que varia linearmente com y (dado que $\mathbf{E} = -\nabla V \Rightarrow E_y = -\partial V/\partial y$)

$$V(y) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}y + \text{constante}. \quad (3.4.32)$$

Logo a diferença de potencial entre as duas placas colocadas a uma distância d é:

$$|V_1 - V_2| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d. \quad (3.4.33)$$

Este resultado foi obtido para cargas infinitas. Contudo se as placas forem finitas, cada uma com área A e as dimensões das placas forem muito maiores do que a distância entre elas d , este resultado será uma boa aproximação. Nesse caso, se as placas têm cargas Q e $-Q$, a capacidade do condensador formado por elas é (usando $\sigma = Q/A$):

$$C = \frac{Q\epsilon_0}{\sigma d} = \frac{A\epsilon_0}{d}. \quad (3.4.34)$$

3.4.3 Associação de condensadores

Condensadores podem ser associados em série ou em paralelo.

Começamos por considerar uma associação de dois condensadores em série, cada um com capacidade C_i , $i = 1, 2$ - Figura 3.3 (esquerda). Nesta associação, a placa positiva do

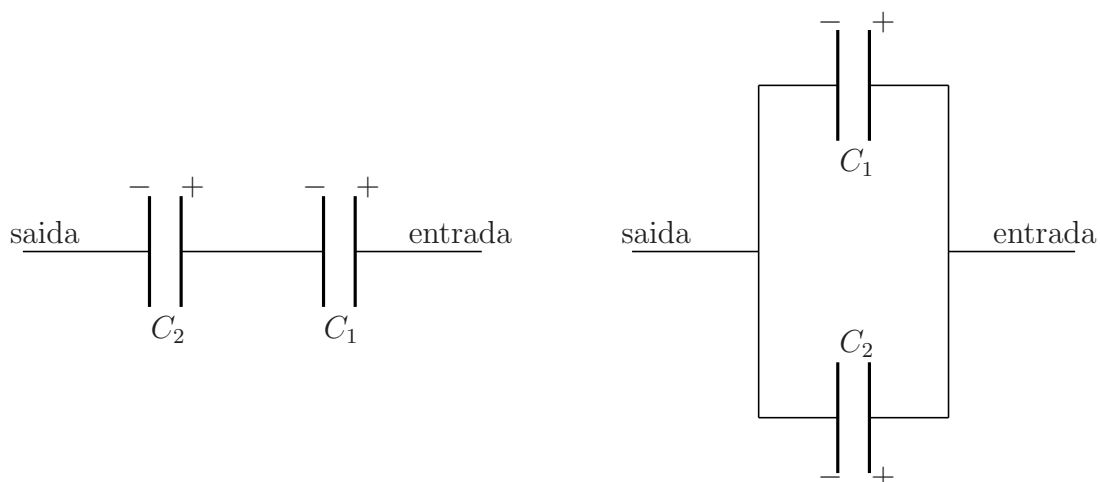


Figura 3.3: Uma associação de condensadores em série (esquerda) e em paralelo (direita).

condensador 1 está ligada o fio de entrada do circuito, a placa negativa do condensador 1 está ligada à placa positiva do condensador 2 e a placa negativa do condensador 2 está ligada ao fio de saída do circuito elétrico. A questão que queremos colocar é qual é a capacidade equivalente entre o fio de entrada e saída, se houvesse apenas um condensador entre eles?

Consideremos as placas “internas”, isto é, a placa positiva do condensador 2 e a negativa do condensador 1. Estas placas estão fisicamente desconectadas do resto do circuito; logo a carga total que nelas existe deve manter-se constante, e independente da ddp aplicada em cada um deles. É razoável admitir que estes pratos têm carga nula quando a ddp aplicada em cada um deles é nula. Logo, quando uma ddp é aplicada em cada um deles, a carga de um deve ser oposta à carga do outro: a placa negativa do condensador 1 adquire carga $-Q$ e a placa positiva do condensador 2 adquire carga $+Q$. Logo, a placa positiva do condensador 1 tem carga $+Q$ e a placa negativa do condensador 2 tem carga $-Q$. As diferenças de potencial que ocorrem em cada um dos condensadores serão genericamente, diferentes: respectivamente V_1 e V_2 . A ddp entre os fios de entrada e saída será $V = V_1 + V_2$. Logo a capacidade equivalente será:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (3.4.35)$$

Para um sistema de N condensadores ligados em série, com capacidades C_i , a capacidade

equivalente será:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} . \quad (3.4.36)$$

Consideramos agora uma associação de dois condensadores em paralelo, em que as placas positivas de todos os condensadores são ligadas a um ponto comum, tal como as negativas - Figura 3.3 (direita). Assim, a ddp será a mesma para todos os condensadores. Se o condensador i acumula carga $\pm Q_i$, nas placas positiva e negativa e tem capacidade C_i , temos

$$Q_1 = C_1 V , \quad Q_2 = C_2 V . \quad (3.4.37)$$

Logo, a carga total das cargas positivas/negativas, que liga ao fio de entrada/saída é:

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V . \quad (3.4.38)$$

O condensador equivalente, que acumula carga Q mediante a diferença de potencial de V tem capacidade

$$C = C_1 + C_2 . \quad (3.4.39)$$

Para um sistema de N condensadores ligados em paralelo, com capacidades C_i , a capacidade equivalente será:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^N C_i . \quad (3.4.40)$$

3.4.4 Energia armazenada num condutor/condensador

Para carregar um condutor temos de dispendir energia, dado que ao trazer novas cargas para o condutor vai ser necessário fazer um trabalho para superar a repulsão do excesso de carga que já lá está presente. Esse trabalho aumenta a energia potencial eléctrica do condutor. Por exemplo, um condutor com carga q e capacidade C tem potencial $V = q/C$. Se trouxermos um elemento de carga adicional dq desde o infinito, o trabalho a realizar é igual à variação da energia potencial eléctrica (que por sua vez é menos o trabalho da força eléctrica devida às cargas que já estavam no condutor):

$$dE_p = dW = V dq = \frac{q}{C} dq . \quad (3.4.41)$$

Integrando esta variação de carga desde zero até ‘a carga final do condutor Q , obtemos a energia potencial eléctrica armazenada no condutor com capacidade C :

$$E_p = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}, \quad (3.4.42)$$

ou, substituindo a carga total no condensador pela ddp aplicada, obtemos uma fórmula para a energia potencial eléctrica armazenada num condutor com capacidade C e submetido à ddp V :

$$E_p = \frac{1}{2} CV^2. \quad (3.4.43)$$

Para obter as relações (3.4.42) e (3.4.43) só foi necessário invocar a capacidade do condutor (ou o seu potencial) e a carga transportada. Por isso, estas formulas aplicam-se também a um condensador, dado que para o formar, é necessário transportar uma carga Q da placa negativa para a positiva e reinterpretar o potencial V do condutor como a diferença de potencial entre as placas do condensador, que é exactamente o que entra na capacidade do condensador.

Existe uma importante e interessante relação entre esta energia potencial eléctrica de um condutor carregado e o campo eléctrico produzido em todo o espaço por esse condutor. Para a motivarmos consideramos um caso especial, a esfera condutora carregada com raio a . De acordo com (3.4.26), a sua capacidade é $C = 4\pi\epsilon_0 a$. Logo a sua energia armazenada é, por (3.4.42)

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \right). \quad (3.4.44)$$

Pretendemos relacionar esta energia com o integral sobre todo o espaço do quadrado do campo eléctrico $E^2 \equiv \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$. Recordando que para a esfera condutora carregada, o campo eléctrico tem a forma (3.4.24), obtemos que

$$E^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2, \quad (3.4.45)$$

se $r \geq a$ e $E^2 = 0$ se $r < a$. Para integrar esta quantidade sobre todo o espaço usamos coordenadas esféricas, em que o elemento de volume é $d^3s = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$

$$\int_{\text{espaço}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} d^3x = \int_{r=a}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = \int_{r=a}^{\infty} 4\pi \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr, \quad (3.4.46)$$

onde na última igualdade fizemos os integrais angulares; fazendo o integral radial obtemos

$$\int_{\text{espaco}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} d^3x = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0^2 a} . \quad (3.4.47)$$

Comparando com (3.4.44) obtemos que

$$E_p = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_{\text{espaco}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} d^3x . \quad (3.4.48)$$

Esta expressão, embora derivada num caso particular tem uma validade mais geral. A energia potencial eléctrica armazenada num sistema de cargas relaciona-se com o integral sobre todo o espaço do quadrado do campo eléctrico desta forma. Podemos por isso afirmar que a *densidade de energia potencial eléctrica no espaço* é

$$\rho_{E_p} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} . \quad (3.4.49)$$

3.4.5 Dipolo eléctrico e materiais dieléctricos

As cargas eléctricas são a fonte de campo eléctrico. Mas podemos imaginar facilmente uma configuração neutra que também seja fonte de campo eléctrico. O caso mais simples é uma configuração composta por uma carga positiva $+q$ e uma carga negativa $-q$, separadas de uma pequena distância. A esta configuração chama-se um *dipolo eléctrico*. O conjunto é claramente neutro; no entanto o facto de as duas cargas estarem ligeiramente separadas garante a existência de um campo eléctrico não nulo.

Utilizando os resultados das secções anteriores é muito simples calcular o potencial e o campo eléctrico para um dipolo eléctrico. Para sermos concretos, consideramos que a carga $\pm q$ está localizada no ponto $(x, y) = (\pm a/2, 0)$, onde $a \in \mathbb{R}^+$ é portanto a distância entre as cargas. Nesta análise negligenciamos a direcção z . O potencial eléctrico num ponto \mathcal{P} , com vector posição $\mathbf{r} = (x, y)$, é então:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \frac{a}{2}\mathbf{i}|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} + \frac{a}{2}\mathbf{i}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - a/2)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + a/2)^2 + y^2}} \right) .$$

As linhas equipotenciais (no plano $x - y$) estão representadas na Figura 3.4. Recordamos que no caso de uma carga pontual, as linhas equipotenciais eram circunferências centradas

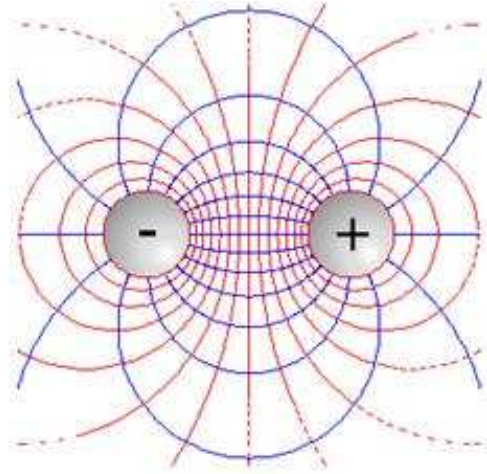


Figura 3.4: Linhas equipotenciais (a vermelho) e linhas de campo eléctrico (a azul) para um dipolo eléctrico.

na carga. Ao juntar outra carga de sinal oposto, de modo a formar um dipolo, estas circunferências são deformadas e aproximam-se da carga no lado em que se encontra a carga oposta. As superfícies equipotenciais no espaço xyz são obtidas como as superfícies de revolução destas linhas, rodando o sistema em torno do eixo dos xx .

O campo eléctrico para um dipolo eléctrico pode ser obtido através do gradiente do potencial $\mathbf{E} = -\nabla V$ ou somando o campo eléctrico das duas cargas:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \frac{a}{2}\mathbf{i}}{|\mathbf{r} - \frac{a}{2}\mathbf{i}|^3} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} + \frac{a}{2}\mathbf{i}}{|\mathbf{r} + \frac{a}{2}\mathbf{i}|^3}.$$

As linhas de campo eléctrico são sempre ortogonais às linhas equipotenciais, apontando da carga positiva para a negativa. No caso do dipolo eléctrico estão representadas na Figura 3.4. São linhas fechadas que começam sempre na carga positiva e acabam na carga negativa. Deste modo, uma aplicação do teorema de Gauss com uma superfície Gaussiana que contem as duas cargas dará sempre um fluxo total nulo, como esperado.

A intensidade do dipolo é medida pelo *momento dipolar eléctrico* \mathbf{p} . Para o exemplo que apresentamos, o momento dipolar eléctrico é definido como

$$\mathbf{p} = qa,$$

onde \mathbf{a} é o vector deslocamento que vai da carga negativa para a carga positiva ($\mathbf{a} = a\mathbf{i}$ no nosso exemplo).¹ Esta definição pode ser generalizada para um sistema com N cargas q_i , independentemente de a soma de todas as cargas ser ou não nula. Se as cargas tiverem vectores posição \mathbf{r}_i , o momento dipolar eléctrico define-se como

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i .$$

Note-se que esta definição se reduz à anterior para o caso de duas cargas com sinais opostos.

Os átomos são constituídos por um conjunto de cargas (protões no núcleo e electrões em orbitais) que não estão na mesma posição. Logo poderíamos antecipar que terão um momento dipolar não nulo. Contudo, o centro de massa dos electrões coincide tipicamente com o do núcleo, pelo que o momento dipolar médio dos átomos é zero. Na presença de um campo eléctrico externo \mathbf{E}_{ext} , no entanto, o movimento dos electrões é perturbado e o centro de massa dos electrões é deslocado de uma distância a relativamente ao do núcleo. O átomo diz-se então *polarizado*, e torna-se um *dipolo eléctrico induzido* com momento dipolar \mathbf{p} proporcional ao campo externo $\mathbf{p} \propto \mathbf{E}_{ext}$.

Por outro lado, muitas moléculas, devido ao seu arranjo geométrico, têm já um *momento dipolar eléctrico permanente*. Por exemplo, na molécula de HCl (ácido clorídrico), o electrão do átomo de Hidrogénio está localizado mais perto do átomo de Cloro do que do ‘seu’ átomo. Isso gera um excesso de carga negativa para o átomo de Cl e um excesso de carga positiva para o átomo de H, pelo que escrevemos H^+Cl^- . O momento dipolar eléctrico resultante, dirigido do átomo de Cl para o átomo de H tem o valor $p = 3.43 \times 10^{-30} \text{ C.m.}$ Muitas outras moléculas familiares, como por exemplo o monóxido de Carbono ou a água, têm também dipolos eléctricos permanentes. Outras, como o dióxido de Carbono, devido à simetria da sua geometria, têm um dipolo eléctrico permanente nulo.

Seja devido a um momento dipolar induzido ou permanente, um dipolo eléctrico colocado num campo eléctrico externo fica alinhado paralelamente ao campo eléctrico e tende a acelerar na direcção em que o campo aumenta (note portanto que num campo uniforme o dipolo não irá adquirir aceleração, dado que a força resultante é nula). Para concluirmos

¹Nota: o dipolo eléctrico é dirigido da carga negativa para a positiva, ao contrário do campo eléctrico.

isto consideramos o exemplo anterior com duas cargas e um campo dirigido segundo x , $\mathbf{E} = E(x)\mathbf{i}$. A força sobre o dipolo será

$$\mathbf{F} = [qE(a/2) - qE(-a/2)]\mathbf{i} = qa\frac{dE}{dx}\mathbf{i} = p\frac{dE}{dx} . \quad (3.4.50)$$

onde usamos o primeiro termo da série de Taylor de $E(x)$:

$$E(a/2) = E(-a/2) + adE/dx + \dots$$

Portanto, como anunciado, a força será no sentido em que o campo aumenta (ou seja, $dE/dx > 0$). Por outro lado, se o campo não está alinhado com as cargas, as duas forças em (3.4.50) irão constituir um binário, que irá fazer o dipolo alinhar com o campo.

Da discussão anterior, resulta que uma porção de matéria colocada num campo eléctrico externo torna-se electricamente polarizada, dado que os seus átomos ou a suas moléculas se tornam dipolos eléctricos (induzidos ou permanentes) alinhados com o campo eléctrico local. Um meio que pode ser polarizado por um campo eléctrico é chamado *dieléctrico*. Esta polarização produz excesso de carga positiva de um dos lados do material e excesso de carga negativa do outro, tornando o material um grande dipolo eléctrico que, como tal se tende a mover na direcção em que o campo eléctrico exterior cresce. Esta é a descrição que explica o fenómeno observável que, por exemplo, um pente electrificado (pela fricção) atrai pequenos pedaços de papel. Exemplos de materiais dieléctricos familiares são a borracha, o vidro, o plástico, o papel, etc. Note-se que, ao contrário dos condutores, nos materiais dieléctricos não há partículas carregadas que se possam mover mais ou menos livremente - isto é, os materiais dieléctricos são *isoladores*.

Quando introduzimos um material dieléctrico no espaço entre os elementos de um condensador a capacidade eléctrica do condensador aumenta relativamente ao caso em que existe vácuo entre esses elementos. A razão é que o meio dieléctrico entre os elementos fica polarizado, devido ao campo resultante da diferença de potencial entre esses elementos, blindando essa mesma ddp que fica efectivamente menor. Logo o condensador passa a acumular a mesma carga para uma menor ddp, ou seja, aumenta a sua capacidade. Este aumento é codificado substituindo a permissividade eléctrica no vácuo ϵ_0 pela permissivi-

dade eléctrica no dieléctrico ϵ

$$\epsilon_0 \longrightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 ,$$

onde $\epsilon_r > 1$ é a permissividade relativa ou constante dieléctrica do meio. Assim, por exemplo, a capacidade de um condensador plano (3.4.34) que tem um meio dieléctrico com constante dieléctrica ϵ_r entre as placas passa a ser

$$C = \frac{A\epsilon_r\epsilon_0}{d} . \quad (3.4.51)$$

3.5 Corrente eléctrica e resistência

Introduzimos agora o importante conceito de *corrente eléctrica*. Uma corrente eléctrica consiste num fluxo de partículas carregadas (electrões ou iões). Uma corrente é produzida, por exemplo, quando se aplica um campo eléctrico num metal, em que partículas carregadas se podem mover, fornecendo o campo externo uma direcção bem definida a este movimento.

3.5.1 Intensidade de corrente eléctrica

A *intensidade de uma corrente eléctrica*, denotada por I , é definida como a carga eléctrica, ΔQ , que passa num intervalo de tempo Δt através de uma secção de área perpendicular ao fluxo da carga. O seu valor médio será

$$I_{media} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} ,$$

enquanto que a intensidade de corrente instantânea é

$$I = \frac{dQ}{dt} .$$

A intensidade de corrente eléctrica é expressa em *Coulomb/segundo=Ampére*, abreviada por A . Um Ampére corresponde a uma intensidade de corrente de um Coulomb por segundo.

Por convenção a corrente eléctrica tem o sentido do movimento das cargas positivas. Como em quase todas as situações práticas a corrente eléctrica resulta do movimento dos electrões, o sentido real da corrente é o oposto ao sentido convencional.

Acelerar um conjunto de cargas para originar uma corrente eléctrica requer energia. Qual a energia necessária para manter uma corrente eléctrica com intensidade I ? Consideremos que num intervalo de tempo Δt , N partículas carregadas com carga q são aceleradas por uma diferença de potencial V . A energia transmitida a cada carga é qV . A potência transmitida às cargas é

$$P = \frac{NqV}{\Delta t} = VI . \quad (3.5.52)$$

Ou seja a potência necessária para manter uma corrente de intensidade I através de uma ddp V é o produto da ddp pela intensidade de corrente. Note-se que

$$\text{Volts} \times \text{Ampere} = \frac{\text{Joules}}{\text{Coulomb}} \times \frac{\text{Coulomb}}{\text{segundo}} = \frac{\text{Joules}}{\text{segundo}} = \text{Watts} ,$$

o que mostra a consistência dimensional do resultado.

3.5.2 Resistência e Lei de Ohm

Quando um campo eléctrico externo é aplicado a um material dieléctrico, este material fica polarizado. Mas quando o campo externo é aplicado a uma região onde existem cargas livres, como num condutor, estas cargas serão postas em movimento e produzirão uma corrente eléctrica, em vez de polarizar o meio. Neste caso, existe um importante facto experimental, denominado *Lei de Ohm*:

Para um condutor metálico, à temperatura ambiente, a razão entre a diferença de potencial V entre dois pontos e a intensidade de corrente I é uma constante.

Esta constante denomina-se *resistência eléctrica*, R :

$$\frac{V}{I} = R \Leftrightarrow V = RI , \quad \text{Lei de Ohm} . \quad (3.5.53)$$

A unidade SI de resistência é o *Ohm* = *Volt/Ampere*, abreviado por Ω . Note-se que esta lei é obedecida por muitos condutores (ditos materiais Ohmicos), num extenso intervalo de valores para V, I e temperaturas. Mas não é obedecida, por exemplo, por semi-condutores.

3.5.3 Condutividade e resistividade

A lei de Ohm pode ser escrita de outra forma para um material concreto. Consideremos um condutor cilíndrico de comprimento l e secção recta A . Definimos a *densidade de corrente*,

como sendo a intensidade de corrente por unidade de área:

$$j = \frac{I}{A} ,$$

cujas unidades são *Ampere/m²*. Por outro lado, admitindo que o campo eléctrico ao longo do condutor é uniforme, com magnitude E , podemos escrever que a diferença de potencial entre dois pontos é $V = lE$. Assim, a lei de Ohm pode ser escrita

$$lE = RjA \Leftrightarrow j = \left(\frac{l}{RA} \right) E \equiv \sigma E ,$$

onde definimos a quantidade $\sigma \equiv l/RA$ que denominamos a *condutividade eléctrica do material*, cujas unidades SI são $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$. A última equação pode, para a maioria das substâncias ser promovida a uma equação vectorial

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} , \quad (3.5.54)$$

onde o vector densidade de corrente é definido como tendo a direcção da corrente eléctrica. Esta equação, que deve ser vista como uma forma alternativa da Lei de Ohm, que a corrente eléctrica é na direcção e sentido do campo eléctrico e proporcional ao campo e à condutividade do material.

Alternativamente, a lei de Ohm (3.5.54) pode ser reescrita

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} , \quad (3.5.55)$$

onde $\rho = 1/\sigma$ é denominada a *resistividade eléctrica do material*, cujas unidades SI são $\Omega \cdot m$. Da definição de condutividade e resistividade concluímos que

$$R = \rho \frac{l}{A} .$$

Note-se que a resistividade é a propriedade genérica do material, enquanto que a resistência é uma propriedade de um elemento específico do material. Mas para cada material, a resistividade depende, por exemplo, da temperatura. Variando a temperatura relativamente a uma temperatura de referência T_0 em que a resistividade de um material é ρ_0 , verifica-se que existe um regime linear em que a variação da resistividade é dada por

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] ,$$

onde α é o coeficiente de variação com a temperatura. Para os metais (ex: prata, cobre, alumínio) a resistividade tipicamente aumenta com a temperatura; mas para os semicondutores (ex: germânio ou silício) tipicamente diminui.

Existe uma conclusão interessante que pode ser retirada da lei de Ohm na forma (3.5.54): escrevendo o vector densidade de corrente para uma corrente de electrões (carga $q = -e$) com velocidade \mathbf{v} como

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{v} ,$$

onde n é o número de electrões (condutores) por unidade de volume, obtemos, de (3.5.54),

$$\mathbf{j} = -\frac{\sigma}{en}\mathbf{E} .$$

O facto interessante é que os electrões de condução no metal atingem uma velocidade constante. Contudo poderíamos esperar que, dado estarem num campo eléctrico uniforme, tivessem uma aceleração (e não velocidade) constante. Esta situação tem alguma analogia com a queda de um corpo na Terra. Sem atrito viscoso (de um fluido) o corpo tem uma aceleração constante; mas na presença de atrito viscoso, o corpo atinge uma velocidade limite. Por analogia podemos pensar que a interacção dos electrões condutores com a rede cristalina origina a força de atrito viscoso que leva a um regime de velocidade limite ser atingido. A consequente dissipação de energia - uma transferência de energia dos electrões condutores para a rede cristalina - leva a um aumento de temperatura do material: o *efeito Joule*. Esta é a razão pela qual é necessário transmitir uma potência dada por (3.5.52), para manter uma corrente num condutor com uma certa ddp aplicada. Se o condutor é um material Ohmico essa potência pode ser reescrita

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} .$$

3.5.4 Associação de resistências

Tal como já discutimos para os condensadores também as resistências podem ser associadas em série ou em paralelo, colocando-se a questão de qual a resistência equivalente, isto é, a resistência que, substituindo a associação, origina a mesma intensidade de corrente para a mesma ddp aplicada.

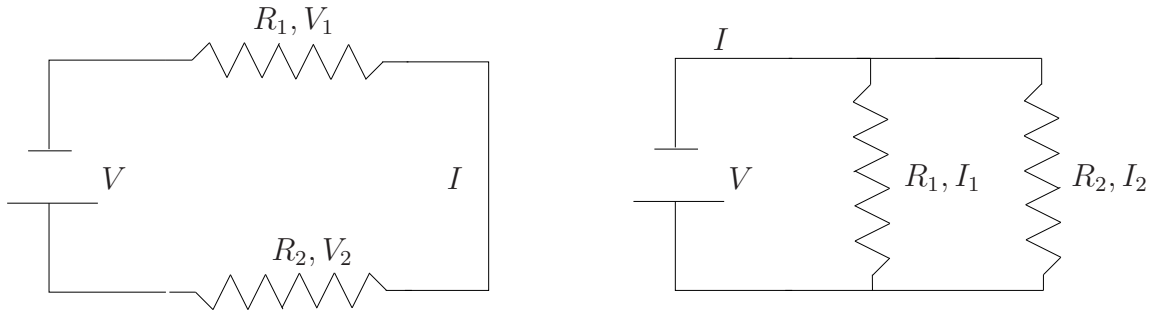


Figura 3.5: Uma associação de resistências em série (esquerda) e em paralelo (direita).

Consideremos uma associação em série de duas resistências - Figura 3.5 (esquerda). A corrente no circuito é I e a ddp real nos terminais da bateria é V . Sejam V_1 e V_2 as ddps nos terminais das resistências R_1 e R_2 , respectivamente. Logo

$$V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I = R_{eq} I .$$

Logo a resistência equivalente é simplesmente a soma das resistências

$$R_{eq} = R_1 + R_2 .$$

Numa associação de N resistências R_i em série, a resistência equivalente é simplesmente

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^N R_i . \quad (3.5.56)$$

Consideremos agora uma associação de duas resistências em paralelo - Figura 3.5 (direita). Neste caso a intensidade de corrente divide-se pelas duas resistências. Seja I_1 , I_2 a intensidade de corrente que percorre a resistência R_1 , R_2 , respectivamente. Logo, a intensidade de corrente total antes da divisão é $I = I_1 + I_2$. Por outro lado, a ddp será a mesma nos terminais de ambas as resistências, que denotamos por V . Assim, pela lei de Ohm

$$V = R_1 I_1 , \quad V = R_2 I_2 .$$

Logo, para a resistência equivalente teremos

$$\frac{V}{R_{eq}} = I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} .$$

Ou seja, o inverso da resistência equivalente é a soma dos inversos das resistências individuais. Numa associação de N resistências R_i em paralelo, a resistência equivalente é simplesmente

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i} . \quad (3.5.57)$$

Estas relações são muito análogas às que descobrimos para os condensadores, mas trocando os resultados das associações em série e paralelo.

3.5.5 Força electromotriz

Consideremos um circuito eléctrico com uma bateria e uma resistência, como exemplificado na Figura 3.6. Designa-se por *força electromotriz*, abreviada por ϵ , a ddp teórica entre os extremos da bateria (ou seja entre os pontos A e B):

$$\epsilon = V_B - V_A . \quad (3.5.58)$$

Note-se que a força electromotriz não tem unidades de força - é uma ddp. Usando a lei de Ohm, a intensidade de corrente no circuito deve ser proporcional a ϵ , sendo a constante de proporcionalidade o inverso da resistência total. Contudo, a bateria também tem uma resistência interna, que denotamos por r . Portanto, pela secção anterior, a resistência equivalente do circuito é $r + R$, pelo que, aplicando a lei de Ohm, a intensidade de corrente será

$$I = \frac{\epsilon}{r + R} . \quad (3.5.59)$$

Logo, a ddp real medida nos terminais da resistência R (entre os pontos C e D), que é $V = RI$, será, em termos da força electromotriz

$$V = \epsilon - rI . \quad (3.5.60)$$

Esta é também a ddp real medida nos terminais da bateria (entre os pontos A e B) e será sempre menor do que a força electromotriz (a não ser no caso idealizado em que a bateria não tem resistência interna).

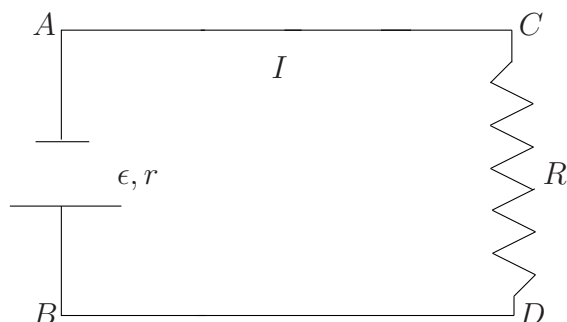


Figura 3.6: Um circuito com uma bateria e uma resistência.

3.5.6 Leis de Kirchhoff

Na discussão que fizemos anteriormente, em particular sobre a associação de resistências já utilizamos as *Leis de Kirchhoff*, que expressam a conservação da carga eléctrica e da energia num circuito eléctrico. Vamos agora enunciar estas leis explicitamente.

Num circuito eléctrico

- i) a soma das corrente que entram numa junção é igual à soma das correntes que saem da junção:

$$\sum I_{in} = \sum I_{out} .$$

Esta lei expressa a conservação da carga eléctrica;

- ii) a soma das diferenças de potencial através de todos os elementos num circuito fechado é zero:

$$\sum_{\text{circuito}} \Delta V = 0 .$$

3.6 Campo magnético

Como temos vindo a discutir, cargas, ou mesmo objectos neutros com dipolo eléctrico, geram campo eléctrico. Existe outra interacção à distância, intimamente relacionada com a interacção eléctrica, mas com propriedades bastante distintas, denominada *interacção magnética*. O exemplo mais familiar da interacção magnética é um íman. Um íman atrai pequenos objectos metálicos, como por exemplo pedaços de limalha de ferro.

Neste caso, a interacção magnética resulta de o íman ser um *dipolo magnético permanente* e macroscópico. A origem deste dipolo magnético permanente, tal como no caso do dipolo eléctrico que discutimos anteriormente para as moléculas, está na sua estrutura microscópica (neste caso atómica), mas essa discussão encontra-se fora do âmbito desta disciplina. Iremos aqui discutir um outro exemplo de interacção magnética: a gerada por cargas em movimento.

3.6.1 A lei de Biot-Savart e a força de Lorentz

Uma carga eléctrica gera um campo eléctrico dado por (3.2.2). Em rigor, esta lei apenas é verdade no âmbito da electrostática, isto é quando todas as cargas estão em repouso relativamente a um referencial inercial, sendo uma boa aproximação quando todas as velocidades são muito pequenas comparadas com a velocidade da luz.

No caso da interacção magnética verifica-se experimentalmente o seguinte facto. Uma carga eléctrica Q , em movimento com velocidade \mathbf{v} , produz um *campo magnético*, que é dado pela *Lei de Biot-Savart*; assumindo que a carga está na origem (num certo instante), o campo magnético produzido no ponto com vector posição $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ é:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{u}_r}{r^2} . \quad (3.6.61)$$

Introduzimos aqui uma constante μ_0 denominada *permeabilidade magnética do vazio*, cujo valor é

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} , \quad (3.6.62)$$

onde T abrevia *Tesla* a unidade SI do campo magnético.

A fórmula (3.6.61) deve ser usada com cuidado. Em rigor, será apenas verdadeira na magnetostática, isto é, em situações onde as correntes de carga sejam estacionárias. Ou seja, ao escrevermos (3.6.61) estamos a assumir que *em todos os instantes existe uma carga na origem* com a velocidade \mathbf{v} . Por esta razão, a lei de Biot-Savart é geralmente escrita em termos da intensidade de corrente I associada a uma corrente de cargas e não à velocidade \mathbf{v} de uma única carga. Para ser concretos, consideremos uma corrente I

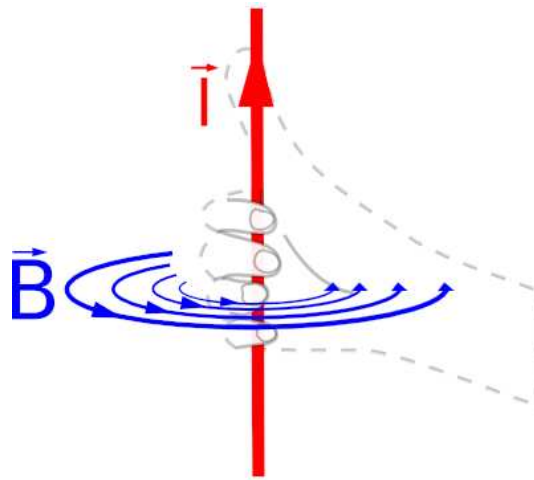


Figura 3.7: Regra da mão direita para obter a circulação do campo magnético \mathbf{B} gerado por uma corrente \mathbf{I} .

na direcção com versor \mathbf{ds} . O campo magnético total no ponto com vector posição \mathbf{r} é obtido somando a contribuição de cada elemento de corrente, cujo vector posição é \mathbf{r}' :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{corrente}} \frac{\mathbf{ds} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (3.6.63)$$

onde o integral é sobre toda a corrente. Note-se que $\int |\mathbf{ds}|$ é o comprimento do fio.

Uma diferença fundamental entre o campo eléctrico gerado por cargas e o campo magnético gerado por correntes está na direcção. O campo eléctrico diverge das cargas positivas e converge para as cargas negativas. O campo magnético circula em torno das correntes, o que matematicamente está codificado no produto vectorial. Esta circulação é dada pela regra da mão direita - Figura 3.7. Por outro lado, tal como para o campo eléctrico, o campo magnético cai com o inverso do quadrado da distância ao elemento de corrente e é proporcional ao elemento de corrente, sendo agora a constante de proporcionalidade $\mu_0/4\pi$, por contraste a $1/4\pi\epsilon_0$ no caso do campo eléctrico. Uma importante relação entre estas constantes é que a velocidade da luz c é obtida como $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$.

Tal como uma carga eléctrica na presença de um campo eléctrico sente uma força eléctrica, dada pela lei de Coulomb (3.1.1), uma carga em movimento ou uma corrente eléctrica na presença de um campo magnético também sente uma força. Esta força é a *força de Lorentz*. Para o caso de uma carga q que se movimenta com velocidade \mathbf{v} na

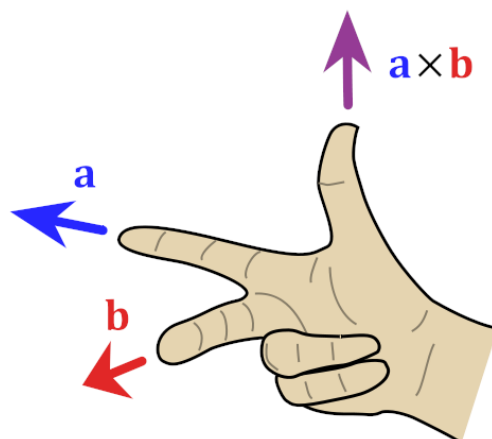


Figura 3.8: Regra da mão direita para o produto vectorial. Para obter a força de Lorentz \mathbf{F} numa carga com velocidade \mathbf{v} num campo magnético \mathbf{B} , fazemos $\mathbf{a} = q\mathbf{v}$, $\mathbf{b} = \mathbf{B}$ e como tal $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{F}$.

presença de um campo magnético \mathbf{B} esta força é:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (3.6.64)$$

A direção e sentido desta força podem ser inferidos por uma outra aplicação da regra da mão direita - Figura 3.8.

3.6.2 A lei de Ampère

Para calcular o campo magnético de uma distribuição de correntes eléctricas tipicamente recorreremos à fórmula (3.6.63). Note-se que se pode aplicar o princípio de sobreposição, pelo que o campo magnético de uma distribuição de correntes é a soma dos campos magnéticos de cada corrente. Mas tal como no caso do campo eléctrico, existe um método alternativo baseado num princípio análogo à Lei de Gauss que se torna conveniente em situações de elevada simetria. Este método usa a *Lei de Ampère* que estabelece o seguinte:

Lei de Ampère:

A circulação C do campo magnético \mathbf{B} através de uma linha fechada L , com elemento de linha $d\mathbf{l}$ na direcção tangente à curva, é igual à corrente eléctrica total I que

atravessa uma superfície delimitada pela linha fechada multiplicada por μ_0 :

$$C_L(\mathbf{B}) = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I . \quad (3.6.65)$$

A linha fechada L onde se faz esta integração denomina-se *linha Amperiana*.

Para usar a lei de Ampère com o objectivo de calcular o campo magnético usa-se o seguinte procedimento:

- i) Dadas as simetrias do problema, sugere-se uma forma para a direcção e dependência coordenada do campo magnético. Por exemplo, num problema com simetria axial, toma-se $\mathbf{B} = B_\phi(\rho)\mathbf{u}_\phi$, isto é, só existe componente azimutal e a componente azimutal só depende da coordenada radial cilíndrica.
- ii) Escolhe-se a linha Amperiana de modo a que o versor tangente seja paralelo à direcção do campo magnético escolhida no ponto anterior. Por exemplo, num problema com simetria esférica, toma-se uma linha Amperiana circular centrada na corrente.
- iii) Calcula-se (3.6.65).

3.7 Indução electromagnética

Vimos até agora que cargas geram divergência/convergência do campo eléctrico e correntes geram circulação do campo magnético. Podemos então perguntar se existe alguma maneira de 1) gerar divergência/convergência para o campo magnético; 2) gerar circulação para o campo eléctrico. Relativamente à primeira questão, as leis do electromagnetismo estabelecem que é impossível gerar divergência/convergência para o campo magnético. Para isso seria necessária a existência de cargas (isto é monopolos) magnéticos. Mas não existe qualquer evidência que tais monopolos magnéticos existam na Natureza. Relativamente à segunda questão as leis do electromagnetismo estabelecem que é de facto possível gerar circulação do campo eléctrico na presença de campos magnéticos variáveis no tempo. Este

é um exemplo de um fenómeno de *indução electromagnética*, isto é, em que um campo magnético (com certas propriedades) pode induzir um campo eléctrico (com certas propriedades), ou vice-versa. A existência destes fenómenos de indução é uma manifestação clara que campos eléctricos e magnéticos são duas formas de uma única entidade: *o campo electromagnético*. O fenómeno de indução da circulação do campo eléctrico por um campo magnético variável no tempo é descrito pela *Lei de Faraday*.

3.7.1 A lei de Faraday

Consideremos um circuito eléctrico. Para existir corrente tem de existir uma força electromotriz, ou seja uma diferença de potencial entre partes do circuito. Como o campo eléctrico é o gradiente do potencial eléctrico isto significa que tem de existir um campo tangente ao circuito, ou seja, tem de existir circulação do campo eléctrico. Se um circuito eléctrico for colocado na presença de um campo magnético estático, por exemplo um íman em repouso, nenhuma corrente eléctrica é gerada no circuito. Mas *se a posição do íman for variada relativamente ao circuito, verifica-se experimentalmente que é gerada uma corrente no circuito*. Quantitativamente esta indução é descrita da seguinte forma:

Lei de Faraday:

A força electromotriz ϵ induzida no circuito é proporcional à taxa de variação temporal do fluxo magnético através do circuito $\Phi_S(\mathbf{B})$:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt}, \quad \text{onde} \quad \Phi_S(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (3.7.66)$$

e onde S é a superfície delimitada pelo circuito. O sinal negativo na Lei de Faraday expressa a

Lei de Lenz:

A polaridade da força electromotriz é tal que a corrente eléctrica induzida cria, por sua vez, um fluxo de campo magnético que se opõe à variação original do fluxo do campo magnético indutor.

Notamos que o fluxo magnético tem unidades SI *Weber*, abreviado por Wb e $Wb = T \cdot m^2$.

3.7.2 Auto-indutância e circuito RLC

Consideremos um circuito percorrido por uma corrente I . A lei de Ampère diz-nos então que esta corrente produz um campo magnético que, em cada ponto, é proporcional a I . Em particular, este campo magnético produz um fluxo magnético através do circuito, que se designa por *autofluxo* e se representa por Φ_I . Como o campo magnético gerado pela corrente é proporcional a esta, também o autofluxo será proporcional a I , ou seja

$$\Phi_I = LI, \quad (3.7.67)$$

onde o coeficiente de proporcionalidade L se designa por *auto-indutância* e depende da forma geométrica do circuito. A unidade SI da auto-indutância é o *Henry*, abreviado por H , e $H = Wb/A$.

Se a corrente I variar no tempo, o autofluxo Φ_I também varia e, de acordo com a Lei de Faraday, uma força electromotriz é induzida no circuito. A este caso particular de indução electromagnética chama-se *auto-indução*. Pela lei de Faraday (3.7.66), a força electromotriz auto-induzida, denotada por ϵ_L é

$$\epsilon_L = -\frac{d\Phi_S(\mathbf{B})}{dt} \stackrel{\text{autofluxo}}{=} -\frac{d\Phi_I}{dt} \stackrel{(3.7.67)}{=} -L\frac{dI}{dt}, \quad (3.7.68)$$

onde assumimos que a geometria do circuito, e como tal a auto-indutância, é constante - circuito rígido.² O sinal negativo em (3.7.68) significa que ϵ_L se opõe à variação da corrente: se a corrente aumenta (diminui), dI/dt é positivo (negativo) e ϵ_L tem sentido o contrário (o mesmo sentido) da corrente. Desta análise pode-se interpretar a auto-indutância como uma inércia de um circuito eléctrico, que se opõe às alterações da corrente que o atravessam.

²Se a forma do circuito for variável, L não será constante e devemos escrever

$$\epsilon_L = -\frac{d(LI)}{dt}.$$

O fenómeno da auto-indução leva a que, num circuito eléctrico real, o regime de estacionaridade não seja atingido imediatamente depois de ligar (ou desligar) o circuito. De facto, depois de fechar o circuito, a intensidade de corrente começa a aumentar, produzindo um autofluxo variável no tempo e logo uma força electromotriz auto-induzida ϵ_L , que é contrária à força electromotriz original. Este efeito retarda o regime de corrente máxima. Para estimar a corrente que percorre o circuito depois de o ligar, consideremos que se liga um circuito com uma força electromotriz ϵ , devida a uma bateria, uma resistência R e auto-indutância L . Pela lei de Ohm:

$$\epsilon + \epsilon_L = RI. \quad (3.7.69)$$

ou, usando (3.7.68)

$$\epsilon - L \frac{dI}{dt} = RI \Leftrightarrow \frac{dI}{\epsilon/R - I} = \frac{R}{L} dt. \quad (3.7.70)$$

Assumindo que ligamos o circuito em $t = 0$, de modo a que $I(t = 0) = 0$ e integrando de $t = 0$ até $t = t'$:

$$\int_0^{I(t')} \frac{dI}{\epsilon/R - I} = \frac{R}{L} \int_0^{t'} dt, \quad (3.7.71)$$

obtemos, usando o facto que ϵ, R, L são constantes

$$-\ln(\epsilon/R - I(t')) + \ln(\epsilon/R) = \frac{R}{L} t' \Leftrightarrow \frac{\epsilon/R}{\epsilon/R - I(t')} = e^{Rt'/L}, \quad (3.7.72)$$

ou, equivalentemente:

$$I(t') = \frac{\epsilon}{R} (1 - e^{-Rt'/L}). \quad (3.7.73)$$

Ou seja, na presença de auto-indutância L , apenas assintoticamente a corrente se aproxima de ϵ/R , o valor dado pela lei de Ohm. Esta expressão para a corrente é semelhante à expressão da velocidade de um corpo que cai num fluido viscoso, em que R desempenha o papel do coeficiente de viscosidade, L o papel da massa (inércia) e ϵ o papel da força da gravidade.

Podemos desenvolver um pouco mais esta analogia entre o comportamento de um circuito eléctrico e um sistema mecânico considerando o *circuito RLC* ou seja, um circuito

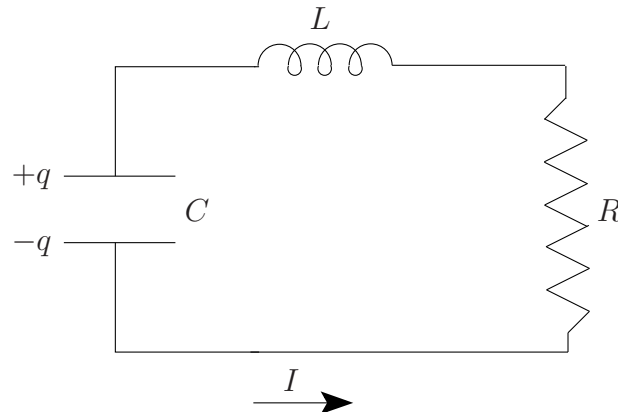


Figura 3.9: Circuito RLC, com uma resistência R , uma capacidade C e uma auto-indutância L . A seta representa o sentido convencional da corrente, que origina a acumulação de carga representada. Note-se que a impedância, apesar de representada por um símbolo localizado no circuito eléctrico, é uma propriedade de todo o circuito e não está concentrada em nenhum ponto particular.

com uma resistência R , um condensador com capacidade C e uma auto-indutância L - Figura 3.9.

Consideremos que a determinada altura circula no circuito uma corrente I (devido a alguma fem inicial), que se encontra a acumular carga no condensador, como representado na Figura 3.9. Esta corrente é $I = dq/dt$. A fem que o condensador cria é contrária a esta corrente. De facto esta força electromotriz quer descarregar o condensador. Existe uma semelhança clara com a força elástica de uma mola. Se a mola se encontra a esticar (correspondendo a um condensador a carregar) a sua força elástica quer comprimi-la (corresponde à fem do condensador querer descarrega-lo). Esta força acaba por travar o alongamento da mola (correspondendo a parar a intensidade de corrente representada na Figura), que começa a comprimir (correspondendo à descarga do condensador). Mas quando a mola passa no ponto de equilíbrio (correspondendo ao condensador descarregar completamente), por inércia começa a comprimir (correspondendo ao condensador carregar com a polarização inversa). Por isso, representamos a fem do condensador por

$$\epsilon_C = -\frac{q}{C}, \quad (3.7.74)$$

onde o sinal menos indica que esta fem é contrária à corrente quando o condensador se encontra a carregar. Assim, a corrente num circuito RLC, é dada pela lei de Ohm

considerando a fem do condensador e a produzida pela auto-indutância:

$$RI = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} . \quad (3.7.75)$$

Derivando esta expressão em ordem ao tempo e usando $I = dq/dt$, obtemos

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0 . \quad (3.7.76)$$

Esta equação é matematicamente equivalente à equação para um oscilador harmónico amortecido (2.2.2), com o mapeamento de parâmetros:

$$(L, R, 1/C) \longleftrightarrow (m, b, k) . \quad (3.7.77)$$

Confirmamos assim que a auto-indutância tem o papel da massa inercial no circuito; a resistência tem o papel de efeito dissipativo; e (o inverso da) capacidade tem o papel de constante elástica. No regime sub-amortecido, em que

$$\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{CL}} , \quad (3.7.78)$$

a solução para a intensidade de corrente do circuito é obtida mapeando os parâmetros da solução (2.2.4):

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \cos \left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t + \phi_0 \right) . \quad (3.7.79)$$

Se uma fem sinusoidal for introduzida no circuito obtemos ainda o análogo de um oscilador harmónico amortecido e forçado.

3.7.3 Indutância mútua

O fenómeno de indução possibilita a troca de energia entre dois circuitos, mediada pelo campo electromagnético. Para detalharmos esta possibilidade, consideremos dois circuitos, **1** e **2**. Se uma corrente I_1 circula no circuito **1** é criado um campo magnético proporcional a I_1 e como tal um fluxo magnético proporcional a I_1 atravessa o circuito 2. Designando esse fluxo por Φ_2 temos

$$\Phi_2 = MI_1 . \quad (3.7.80)$$

Analogamente, se uma corrente I_2 circula no circuito **2** é criado um campo magnético proporcional a I_2 e como tal um fluxo magnético proporcional a I_2 atravessa o circuito 1. Designando esse fluxo por Φ_1 temos

$$\Phi_1 = MI_2 . \quad (3.7.81)$$

O ponto que desejamos destacar é que o coeficiente M é o mesmo nas duas equações, e depende da geometria dos dois circuitos e do seu posicionalmente relativo. A este coeficiente chama-se *indutância mútua*. A indutância mútua é portanto simétrica. Note-se que M tem como unidades SI o *Henry*, tal como a auto-indutância.

No caso de a corrente I_1 variar no tempo, o fluxo Φ_2 também varia, produzindo uma fem no circuito **2** que, pela lei de Faraday, é (assumimos que os circuitos são rígidos e fixos no espaço, de modo a que M não varie no tempo)

$$\epsilon_{M,2} = -M \frac{dI_1}{dt} . \quad (3.7.82)$$

Analogamente, se a corrente I_2 variar no tempo, o fluxo Φ_1 também varia, produzindo uma fem no circuito **1** que é

$$\epsilon_{M,1} = -M \frac{dI_2}{dt} . \quad (3.7.83)$$

Podemos agora, usando a lei de Ohm, obter uma equação para a intensidade de corrente no circuito **1**, levando em conta todas as fem que actuam neste circuito. Assumindo que o circuito **1** tem uma resistência total R_1 , auto-indutância L_1 e uma capacidade C_1 , temos

$$R_1 I_1 = \epsilon_{L,1} + \epsilon_{C,1} + \epsilon_{M,1} , \quad (3.7.84)$$

onde $\epsilon_{L,1} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$ e a força electromotriz auto induzida, $\epsilon_{C,1} = -q_1/C_1$ é a força electromotriz devida à acumulação de carga no condensador do circuito. Logo, tirando uma derivada temporal da equação (3.7.84), tal como na sub-secção anterior, obtemos:

$$L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C_1} I_1 = -M \frac{d^2 I_2}{dt^2} . \quad (3.7.85)$$

De um modo exactamente análogo, se o circuito **2** tem uma resistência total R_2 , auto-indutância L_2 e uma capacidade C_2 , obtemos a equação:

$$L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C_2} I_2 = -M \frac{d^2 I_1}{dt^2} . \quad (3.7.86)$$

As equações (3.7.85) e (3.7.86) são um sistema de equações diferenciais acopladas, onde a constante de acoplamento é a indutância mútua M . Qualitativamente, este sistema é semelhante aos sistemas de osciladores acoplados que estudámos na secção 2.4, embora nesse estudo não tenhamos considerado amortecimento. Não vamos resolver explicitamente este sistema, o que pode ser feito por um método matricial semelhante ao discutido na secção 2.4, mas o aspecto fundamental que desejámos destacar é que, tal como para os osciladores acoplados, o acoplamento irá permitir trocas de energia entre os dois osciladores. Esta troca é mediada pelo campo electromagnético, que age como o portador da energia de um circuito para o outro.